

量子力学 2008 : プリント (3)

担当 : 星健夫、TA : 谷川雅一

お知らせ

- サポートウェブページを以下に設けるので、随時参照すること。配布プリントの PDF ファイルも、(一部をのぞいて) 載せる予定。
<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~hoshi/edu/index.html>
- オフィスアワー …… 星 : 火曜 5 限、谷川 : 月曜 3 限
- 補講のお知らせ …… 後日休講が予定されているため、5 月 2 日 (金) 1 限に应ゼミ 2 にて補講を行う。注 : 5 月 2 日 (金) は、もともと、月曜相当の時間割で行われる日。

3

質点の質量を m 、バネ定数を $m\omega^2$ として ($\omega > 0$)、バネ系のニュートン方程式は、以下で与えられる ;

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

- (a) 古典力学におけるエネルギー保存則を導け。
- (b) 対応原理を用いて、対応するシュレーディンガー方程式を導出せよ。
- (c) シュレーディンガー方程式の解 $\phi(x)$ を、定数 C, α (ともに正) が入った形

$$\phi(x) = C e^{-\alpha x^2}$$

に仮定する。このとき、具体的に α と E を計算せよ。

- (d) (c) の関数に対して、 C を決めるための条件を (数式で) 書け。実際に C を求める必要はない。
- (e) (c) の関数に対して、 $\hbar\omega = 1 \text{ eV}$ のとき、 $\sqrt{\alpha}$ のおおよその値を、SI 単位系で計算せよ。ただし、以下の値を使え ; $m \approx 10^{-30} \text{ kg}$, $\hbar \approx 10^{-34} \text{ Js}$, $4\pi\epsilon_0 \approx 10^{-10} \text{ C}^2/(\text{Vm})$, $e^2 \approx 3 \times 10^{-38} \text{ C}^2$, $1 \text{ eV} \approx 2 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

2次元等方的調和振動子系について、以下の問いに答えよ。

(a) 古典力学においては、エネルギー E

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \quad (1)$$

が保存される。上記で m, k の物理的意味を答えよ。

(b) 量子力学における対応原理を用いて、対応するシュレーディンガー方程式を書け。

(c) (b) で得られたシュレーディンガー方程式を、束縛状態に対して解き、基底エネルギー、第1励起エネルギー、第2励起エネルギーを求めよ。また、それぞれのエネルギーに対して、対応する波動関数を書け。ただし、以下の「参考」にある事項は、証明なしに使ってよい。

(d) (c) で書いた波動関数についてそれぞれ、波動関数が正である領域と、負である領域とを、 xy 平面に図示せよ。

参考：1次元調和振動子系の束縛状態

シュレーディンガー方程式は、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) u_n = \varepsilon_n u_n \quad (2)$$

で与えられる。これを解くと、固有エネルギーは、

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

で与えられ、対応する波動関数 u_n は、

$$u_n(x) = c_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} \quad (4)$$

となる。ただし c_n は規格化定数であり、 $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$ である。また、 H_n はエルミート多項式であり、低次では以下ようになる；

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t$$