量子力学2008：プリント（4）

担当：星健夫、TA：谷川雅一

お知らせ

- サポートウェブページを以下に設けるので、随時参照すること。配布プリントのPDFファイルも、（一部をのぞいて）載せる予定；<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~hoshi/edu/index.html>
- オフィスアワー …… 星：火曜5限、谷川：月曜3限
- 補講のお知らせ …… 後日休講が予定されているため、5月2日（金）1限に应ゼミ2にて補講を行う。注：5月2日（金）は、もともと、月曜相当の時間割で行われる日。

4（再掲載）

2次元等方的調和振動子系について、以下の問いに答えよ。

(a) 古典力学においては、エネルギー E

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \quad (1)$$

が保存される。上記で m, k の物理的意味を答えよ。

(b) 量子力学における対応原理を用いて、対応するシュレーディンガー方程式を書け。

(c) (b) で得られたシュレーディンガー方程式を、束縛状態に対して解き、基底エネルギー、第1励起エネルギー、第2励起エネルギーを求めよ。また、それぞれのエネルギーに対して、対応する波動関数を書け。ただし、以下の「参考」にある事項は、証明なしに使ってよい。

(d) (c) で書いた波動関数についてそれぞれ、波動関数が正である領域と、負である領域とを、 xy 平面に図示せよ。

参考：1次元調和振動子系の束縛状態

シュレーディンガー方程式は、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) u_n = \varepsilon_n u_n \quad (2)$$

で与えられる。これを解くと、固有エネルギーは、

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

で与えられ、対応する波動関数 u_n は、

$$u_n(x) = c_n H_n(\alpha x) e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} \quad (4)$$

となる。ただし c_n は規格化定数であり、 $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$ である。また、 H_n はエルミート多項式であり、低次では以下のようなになる；

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t$$

5 (数学的補足)

$u \equiv u(x, t)$ に対する 1 次元熱伝導方程式は、熱伝導定数 $\kappa (> 0)$ を用いて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

と書ける。 $u \equiv u(x, t) = X(x)T(t)$ と変数分離形を仮定し、 $X(x), T(t)$ に対する常微分方程式を書き下せ (常微分方程式を解く必要はない)。

注: この問題は、例えば以下に載っている; 大石「理工系の数学入門コース 6; フーリエ解析」岩波書店。

6 (数学的補足)

(a) 定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を計算せよ。ヒント: I^2 は、

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

のように 2 重積分で表せる。これを円筒座標 (ρ, ϕ) に書き直して計算する ($x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$)。注: この問題は例えば以下に載っている; 石原・浅野「理工系の基礎: 微分積分」裳華房

(b) 問題 3 の波動関数

$$\phi(x) = C e^{-\alpha x^2}$$

規格化定数 C を、 α の関数として、具体的に計算せよ。

7

水素原子に対するシュレーディンガー方程式のうち、s 状態に対する方程式は、以下の常微分方程式に帰着できる;

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} u(r) = E u(r). \quad (1)$$

ここで、電子の質量を m 、電子の電荷量の絶対値を e 、真空の誘電率を ϵ_0 、プランク定数を $\hbar$ とした。

(a) この方程式は、適当な定数 α, λ を用いて

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha}{r} \right\} u(r) = \lambda u(r) \quad (2)$$

と書き直せることを示し、 α, λ の具体的な表式を書け。

(b) 適当な正の定数 μ を用いて

$$u(r) = r e^{-\mu r} \quad (3)$$

の形を仮定すると、式 (2) の解の一つが得られる。具体的に μ, λ を求めよ。

(c) (b) の解に対するエネルギー E の表式を、 $m, e, \epsilon_0, \hbar$ で書け。また、 E のおおよその値を、SI 単位で概算せよ。必要なら、 $m \approx 10^{-30} \text{kg}$, $\hbar \approx 10^{-34} \text{Js}$, $4\pi\epsilon_0 \approx 10^{-10} \text{C}/(\text{Vm})$, $e^2 \approx 3 \times 10^{-38} \text{C}^2$, を使え。