

量子力学 2008 : プリント (5)

担当 : 星健夫、TA : 谷川雅一

お知らせ

- サポートウェブページを以下に設けるので、随時参照すること。配布プリントの PDF ファイルも、(一部をのぞいて) 載せる予定 ; <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~hoshi/edu/index.html>
- オフィスアワー …… 星 : 火曜 5 限、谷川 : 月曜 3 限

7

水素原子に対するシュレーディンガー方程式のうち、s 状態に対する方程式は、以下の常微分方程式に帰着できる;

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} u(r) = Eu(r). \quad (1)$$

ここで、電子の質量を m 、電子の電荷量の絶対値を e 、真空の誘電率を ϵ_0 、プランク定数を $\hbar$ とした。

(a) この方程式は、適当な定数 α, λ を用いて

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha}{r} \right\} u(r) = \lambda u(r) \quad (2)$$

と書き直せることを示し、 α, λ の具体的な表式を書け。

(b) 適当な正の定数 μ を用いて

$$u(r) = r e^{-\mu r} \quad (3)$$

の形を仮定すると、式 (2) の解の一つが得られる。具体的に μ, λ を求めよ。

(c) (b) の解に対するエネルギー E の表式を、 $m, e, \epsilon_0, \hbar$ で書け。また、 E のおよその値を、SI 単位で概算せよ。必要なら、 $m \approx 10^{-30} \text{kg}$, $\hbar \approx 10^{-34} \text{Js}$, $4\pi\epsilon_0 \approx 10^{-10} \text{C}/(\text{Vm})$, $e^2 \approx 3 \times 10^{-38} \text{C}^2$, を使え。

球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は、

$$l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, l-1, l$$

に対して定義され、低次の関数 ($l = 0, 1$) は、以下で与えられる；

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (1)$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{+i\phi} \quad (2)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (3)$$

$$Y_{1-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \quad (4)$$

注：複素数になっていることに注意。なお、一般の Y_{lm} の関数形は、教科書 p.93 を参照。

(a)(1)-(4) の関数が、 $\hat{l}_z$ の固有関数になっていることを示せ。ただし、 $\hat{l}_z$ の定義は、

$$\hat{l}_z \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5)$$

注：実際に $\hat{l}_z$ を作用させて、

$$\hat{l}_z Y = (\text{定数})Y \quad (6)$$

を満たすことを確かめ、上式の「(定数)」を具体的に求める。

(b)(1)-(4) の関数が、 $\hat{l}^2$ の固有関数になっていることを示せ。ただし、 $\hat{l}^2$ の定義は、

$$\hat{l}^2 \equiv -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (7)$$

注：実際に $\hat{l}^2$ を作用させて、

$$\hat{l}^2 Y = (\text{定数})Y \quad (8)$$

を満たすことを確かめ、上式の「(定数)」を具体的に求める。