

量子力学 2008 : プリント (8)

担当 : 星健夫、TA : 谷川雅一

13

自由電子について、 x, y, z 方向に距離 L の周期的境界条件を置き (例えば $\phi(x+L, y, z) = \phi(x, y, z)$) λ 体積 $V \equiv L^3$ に含まれる電子を考える。シュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \varepsilon \phi \quad (1)$$

となる。注 : この系を「自由電子ガス」(又は「自由フェルミ気体」) と言う。Na など単純金属と呼ばれる物質は、このようなモデルで (ある程度) 考えることができる。例えば、キッテル「固体物理学入門」(丸善)。

(a) エネルギー準位 ε は、整数 (n_x, n_y, n_z) で指定され、

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (2)$$

となることを示せ。

(b) あるエネルギー ε_F に対して、 $\varepsilon(n_x, n_y, n_z) \leq \varepsilon_F$ を満たす状態 (n_x, n_y, n_z) の数を、 $N(\varepsilon_F)$ と書く。状態数 $N(\varepsilon)$ を以下の手順で求める。電子数 N が十分大きい数だと思つと、 (n_x, n_y, n_z) を連続空間だと考えることができる。その結果半径 n_F の球の体積が、電子数 N の半分を与える (半分なのは spin 自由度があるため);

$$\frac{4\pi}{3} n_F^3 = \frac{N}{2} \quad (3)$$

この式は半径 n_F を決める式である。さらに、

$$k_F \equiv \frac{2\pi}{L} n_F \quad (4)$$

で、波数の次元をもつ量を定義できる。これを「Fermi 波数」と呼ぶ。電子が占めるエネルギー準位のうち、最大の値

$$\varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 \quad (5)$$

が定義できて、これを「Fermi エネルギー」と呼ぶ。上記関係式から、 $N(\varepsilon_F)$ を求めよ。

(c) 状態密度 $D(\varepsilon)$ は、状態数 $N(\varepsilon)$ と

$$N(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6)$$

の関係にある。状態密度 $D(\varepsilon)$ を求めよ。

お知らせ

- サポートウェブページを以下に設けるので、随時参照すること。配布プリントのPDF ファイルも、（一部をのぞいて）載せる予定；<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~hoshi/edu/index.html>
- まとめテスト：6月18日（水）。5月28日までの内容＋問題13（a）。下記の本の持ち込みを、認める；原康夫・岡崎誠「工科系のための現代物理学」裳華房。原島鮮「初等量子力学」裳華房。小出昭一郎「量子力学Ⅰ」裳華房。また、A4用紙1枚の「まとめメモ」の持ち込みを認める（裏面使用可。手書きでもコピーでも可）。試験後に「まとめメモ」を提出しても良い（内容によっては、加対象となる。次週返却する）。

以上。