

触ってみよう、Maxima に。

～数式処理システム Maxima の使い方～

大野仁嗣

2007/05/15

ここでは、検算や関数の可視化に便利な数式処理システムについて学びます。
使うソフトは Maxima です。

Maxima とは・・・基はマサチューセッツ工科大学で開発された数式処理システム。Maple とか、
Mathematica といった商用ソフトと違い、フリーソフトなので無料で使える。
最新版は、<http://maxima.sourceforge.net/> にあります。ページは英語です。
サポートページにも情報がありますので必ずチェックして下さい。

0. 起動する。

各 PC で環境が違うと思いますので、スタートメニュー内の収納場所は自分で探してください。
「Maxima」とか、「Maxima-(バージョン)」という項目があるはずです。次のうち、

- Command line Maxima
- xMaxima
- wxMaxima

どれを選択しても Maxima が立ち上がります。3 つは見た目が違うだけで、どれを選んでも計算はきちんとしてくれます。違いを紹介すると、

- Command line Maxima

動作が軽快な CUI(Character-based User Interface)を採用している。ただ、複雑な数式や複数行にまたがると若干見にくい。

- xMaxima

GUI(Graphical User Interface)を採用しているが、数式の表示はテキストベースで、前者と変わらない。

- wxMaxima

こちらも GUI を採用している。ギリシャ文字フォントが使えるため、数学記号が格段に見やすい。
筆者はこちらを普段使っています。

図1は、xMaxima と wxMaxima で同じ数式を表示させて比較しています。上側が xMaxima、下側が wxMaxima です。文字が小さいことを除いて、どこが違うか見てください。

今回は表示が見やすい「wxMaxima」を使って説明していきます。

ここで、さらに見やすい表示設定に変更します。手順に従って設定してください。(図2)

1. 「Edit」メニューの「Configure」をクリックします。
2. 「Style」の中の「Use greek font」の左側にある四角をつついてチェックを入れます。
3. 「OK」を押して抜けます。

この設定を行うと、図 1 の数式は図3のように表示されるようになります。

```
(%i1) 2*pi*integrate(f(x)*sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x,-a,a);
```

$$\frac{2 \pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2 + 1} dx}{}$$

```
(%i1) 2*pi*integrate(f(x)*sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x,-a,a);
```

$$2 \pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2 + 1} dx$$

図 1 xMaxima(上)と wxMaxima(下)、表示形式の比較。

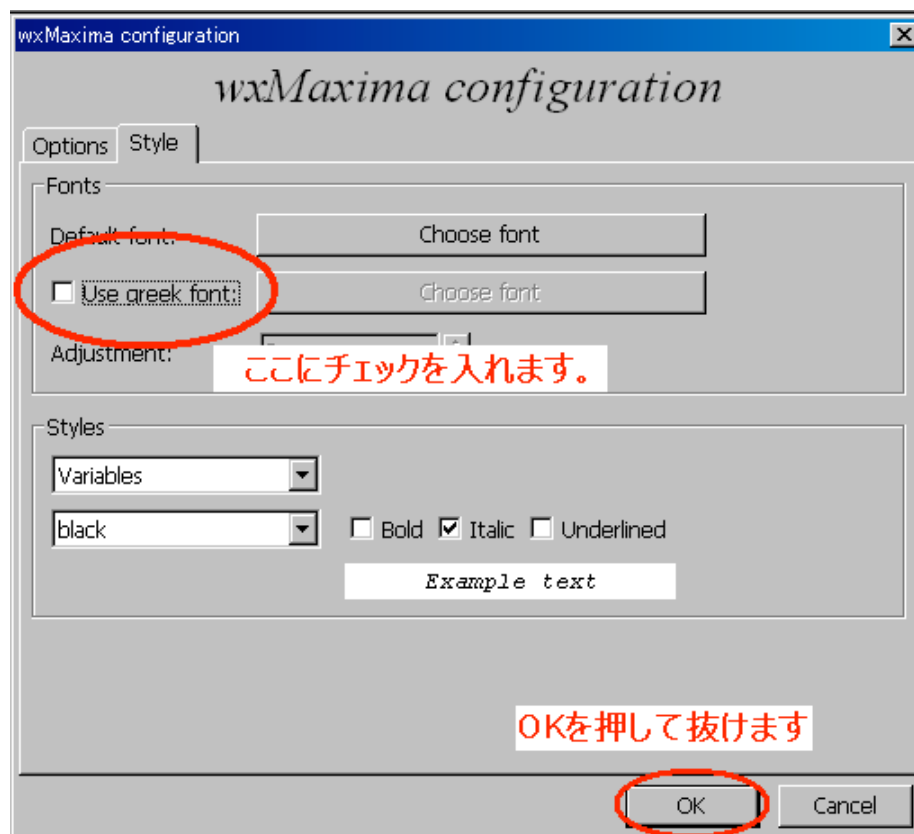


図 2 Configure の画面

```
(%i1) 2*pi*integrate(f(x)*sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x,-a,a);
```

(%o1)
$$2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2 + 1} dx$$

図 3 wxMaxima、さらに見やすい設定を行った後の式

設定はできましたか？できましたら次へ進みましょう！

1. 四則演算

さて、実際に入力して計算していきましょう。「INPUT:」と書かれている横の入力欄に数式を入力して使います。次の計算を入力してみてください。(%i1)は人間が入力した行、(%o1)はコンピューターが返してきた結果です。

```
(%i1) 5+6;  
(%o1) 11      (加法)
```

```
(%i2) 5-6;  
(%o2) -1      (減法)
```

```
(%i3) 5*6;  
(%o3) 30      (乗法)
```

```
(%i4) 5/6;  
(%o4)  $\frac{5}{6}$       (除法)
```

雰囲気は、先日この時間で勉強した「gnuplot」と似ていますね。

```
(%i5) 5^6;  
(%o5) 15625      (べき乗)
```

```
(%i6) sqrt(144);  
(%o6) 12      (ルート)
```

```
(%i7) sqrt(-1);  
(%o7) %i      (虚数単位のi)
```

gnuplot と似ていると書きましたが、部分的に書式が違います。例としてべき乗があります。注意しましょう。また、複素数にも対応しています。%o7にもありますが、%i は虚数単位の*i*です。ちなみに、%eは自然対数の底の*e*、%piは*π*です。

Maxima では数式の最後に「; (セミコロン)」を打つ必要があります。wxMaxima は気を利かせて補完してくれるので入力しなくても計算は走りますが、忘れずに入力する癖をつけましょう。

2. 分数の計算

さて、(%o4)で計算結果は 0.83333...ではなく、分数で返ってきました。Maximaでは分数を分数のまま扱うことができます。

```
(%i8) 1/2+1/3;
```

```
(%o8)  $\frac{5}{6}$ 
```

```
(%i9) 1/2*1/3;
```

```
(%o9)  $\frac{1}{6}$ 
```

さて、結果を小数で表示したいときはどうしましょう？そんなときは「float」を使います。書式は、

```
float(式);
```

ここでは、(%o9)の式を引用して、小数で結果を表示してみましょう。

```
(%i10) float(%o9);
```

```
(%o10) 0.166666666666667
```

このように、Maxima では任意の式を引用して計算することも可能です。

もちろん、(%o9)の部分をはかの式番号や数式に変更しても OK です。

桁数を指定したいときは、「bfloat」を使います。

```
(%i11) bfloat(%pi), fpprec:50;
```

```
(%o11)
```

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751b0
```

円周率を50桁まで表示させました。「fpprec:」の後の数字は桁数です。指定しない場合は16桁で表示します。また、bfloat では、必ず末尾に B に続いて、最高桁の指数が表示されます。

3. 式の展開・因数分解

式の展開や因数分解といえば、手計算でミスしやすい箇所ですよ（少なくとも筆者はよくここでつまずく）。そんなとき Maxima に計算させてチェックしてみるのも、時間短縮につながるのではないのでしょうか。

それではまず、式の展開から紹介します。式の展開には `expand` 函数を使います。書式は、

`expand(展開する式);`

です。実際にやってみましょう。

例題 3-1: 次の式を展開しなさい。

① $(x+1)^3$ ② $(2x+3)^2 \times (x+1)^3$ ③ $(a+b)^5$

```
(%i1) expand((x+1)^3);
```

```
(%o1) x^3 + 3 x^2 + 3 x + 1
```

```
(%i2) expand((2*x+3)^2*(x+1)^3);
```

```
(%o2) 4 x^5 + 24 x^4 + 57 x^3 + 67 x^2 + 39 x + 9
```

```
(%i3) expand((a+b)^5);
```

```
(%o3) b^5 + 5 a b^4 + 10 a^2 b^3 + 10 a^3 b^2 + 5 a^4 b + a^5
```

どうでしょう？特に 2 番目の問題は計算するのは正直面倒だと思います。

さて、逆に因数分解したいときはどうすればいいでしょう？この場合、`factor` 函数を使います。書式は、

`factor(因数分解する式);`

です。

例題 3-2:

例題 3-1 で展開した結果を因数分解して、もとの式に戻るか確認しなさい。

```
(%i4) factor(x^3+3*x^2+3*x+1);
```

```
(%o4) (x + 1)^3
```

```
(%i5) factor(%o2);
```

```
(%o5) (x + 1)^3(2 x + 3)^2
```

```
(%i6)
```

```
factor(b^5+5*a*b^4+10*a^2*b^3+10*a^3*b^2+5*a^4*b+a^5);
```

```
(%o6) (b + a)^5
```

(%i5) は、先ほど計算して出力した式(%o2)を引用しています。

また、式の部分に自然数を与えると、素因数分解してくれます。

```
(%i7) factor(6300);
```

```
(%o7) 2^2 3^2 5^2 7
```

出力された式 $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ を計算して、もとに戻るか確認してください。

4. 方程式

この章では連立方程式を解かせるところまでを紹介します。

方程式を解かせる命令は「solve」です。書式は、

solve(方程式, 解かせる変数);

です。では、手始めに次の問題を解いてみましょう。

例題 4-1:

2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の解を α, β で、 $\alpha > \beta$ とするとき、 $\alpha = \boxed{ア}$ 、 $\beta = \boxed{イ}$ である。

(出展: H18 年度、大学入試センター試験 数学 I)

問題文の一部を引用してみました。次の順序で入力してみてください。

```
(%i1) s:x^2-3*x-1=0;
```

```
(%o1)  $x^2 - 3x - 1 = 0$ 
```

```
(%i2) solve(s,x);
```

```
(%o2) [  $x = -\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ ,  $x = \frac{\sqrt{13}+3}{2}$  ]
```

```
(%i3) float(%);
```

```
(%o3) [  $x = -0.30277563773199$ ,  $x = 3.302775637731995$  ]
```

(%i2)では、「s」という記号に方程式を代入しています。こうすれば方程式が複雑になっても、命令自体は短く、見やすい状態で作業ができます。もちろん、そのまま入力しても計算はできます。

%i3 で、方程式を解いて、(%i4)で小数に直しています。

例題の解ですが、結果から $\boxed{ア}=3.3027\cdots$ 、 $\boxed{イ}=-0.3027\cdots$ であることがわかりました。

さて、先ほども書きましたが、文字が入っていてもそのまま解くことができます。
おなじみの式を計算してみましょう。

```
(%i4) solve(a*x^2+b*x+c=0, x);
```

```
(%o4) [ x = -  $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}$ , x =  $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$  ]
```

次は連立方程式です。連立方程式を解くときも、「solve」を使います。書式は、

```
solve([方程式のリスト], [解かせる変数のリスト]);
```

です。では、使ってみましょう。

例題 4-2: 次の連立 1 次方程式を解きなさい。(出展: 中川義行著 Maxima 入門ノート 1.2.1)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 30 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

今回の方程式もそう長くはないですが、pとqに代入して計算していきます。

```
(%i5) p:2*x+4*y=30;
```

```
(%o5) 4 y + 2 x = 30
```

```
(%i6) q:x+y=12;
```

```
(%o6) y + x = 12
```

```
(%i7) solve([p,q],[x,y]);
```

```
(%o7) [ [ x = 9 , y = 3 ] ]
```

どうでしょう、計算できましたか？例として紹介したのは1次方程式ですが、もちろん高次になっても対応できます。

5. 極限・微分

この章ではMaximaに微積分を計算させます。簡単に計算してくれますので、計算問題の検算にも使えます。

まず、極限を計算させましょう。単純に極限を計算するだけなら、Maximaに函数が用意されています。書式は、

`limit(函数,変数,近づける値);`

さらに、右極限(左極限)を指定するときはオプションとして、

`limit(函数,変数,近づける値,plus [左極限の時は minus]);`

で指定します。では、実際に計算させて見ましょう。

例題 5-1: 次の式を計算しなさい。

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \quad \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}$$

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
```

```
(%o1) 1
```

```
(%i2) limit((1+1/n)^n,n,inf);
```

```
(%o2) %e
```

```
(%i3) limit(1/x,x,0,plus);
```

```
(%o3) ∞
```

```
(%i4) limit(1/x,x,0,minuss);
```

```
(%o4) - ∞
```

次に、微分を計算します。微分も、単純に計算するなら、関数が用意されていますので使います。導関数を求める書式は、

`diff(関数, 微分用変数1, 階数1, 微分用変数2, 階数2, ...);`

です。微分する変数がひとつで、一階の導関数を求めたいときは階数を省略することができます。また微分用変数、階数ともに与えなければ、全導関数を求めます。

例題 5-2: 次の計算をなさい。

① $\log x$ の一次導関数 ② 2^{-x} の一次導関数 (対数微分法の問題)

③ $\sin ax + \cos bx$ の2次導関数

```
(%i5) diff(log(x), x);
```

```
(%o5) 1  
      x
```

```
(%i6) diff(2^-x, x);
```

```
(%o6) - log(2)  
      2x
```

```
(%i7) diff(sin(a*x)+cos(b*x), x, 2);
```

```
(%o7) - b2 cos(b x) - a2 sin(a x)
```

微分の操作は理解できましたか？微分ができたら次は・・・。

6. 級数・積分

微分の次と言えば積分ではないでしょうか。まず、積分の基本となる級数和から説明します。
総和を求める関数の書式は、

```
sum(関数、添え字変数、初期値、終値);
```

総積を求める関数の書式は

```
product(関数、添え字変数、初期値、終値);
```

です。実際に使ってみましょう。

例題 6-1: 次の計算をなさい。

$$\textcircled{1} \sum_{i=1}^{10} i \quad \textcircled{2} 10!$$

```
(%i1) sum(i,i,1,10);
```

```
(%o1) 55
```

```
(%i2) product(i,i,1,10);
```

```
(%o2) 3628800
```

ただ、これらは数値計算のみで、記号処理は行いません。記号処理が必要な場合は `nusum` 関数を使います。書式は `sum` と同じで、

```
nusum(関数、添え字変数、初期値、終値);
```

となります。

```
(%i3) nusum(k^3,k,1,n);
```

```
(%o3) 
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

```

次に、積分を計算します。積分を求める関数の書式は、

`integrate(被積分関数, 積分変数, 開始値, 終了値);`

開始値と終了値を書かなければ、不定積分になります。

そうです、Maxima は不定積分も計算できるのです！さっそくやってみましょう。

例題 6-2: 次の式を計算せよ。

$$\textcircled{1} \int (ax^2 + bx + c) dx \quad \textcircled{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

注:(2)については、大学1年後期で習います。例えば以下を参照してください；

石原・浅野「理工系の基礎 微分積分」裳華房,p.167

```
(%i4) integrate(a*x^2+b*x+c,x);
```

```
(%o4)  $\frac{a x^3}{3} + \frac{b x^2}{2} + c x$ 
```

```
(%i5) integrate(exp(-x^2),x,0,inf);
```

```
(%o5)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 
```

以上で、積分計算についての説明は終わりです。教科書に掲載されている問題などで練習してみてください。

7. 応用例

ここからは応用例です。次の問題を見てください。

例題 7-1:

$$y = ce^{x^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y' = 2xy \quad \cdots \textcircled{2}$$

①が②の解であることを示せ。

今回は情報リテラシーの授業ですから、数学的な話はほかの授業にお任せします。

早速題意を満たしているかを確認しましょう。式①を「y」という記号に置き換えます。

```
(%i39) y:C*exp(x^2);
```

```
(%o39) %ex2 C
```

問題にある

$$y' = 2xy$$

という式を移項して、

$$2xy - y' = 0$$

をyが満たしていれば、題意は満たします。

第1項は展開する必要があります。展開の関数はなんでしたか？そうです、「expand」ですね。

では、計算しましょう。

```
(%i40) expand(2*x*y)-diff(y,x);
```

```
(%o40) 0
```

答えはゼロになりましたね。ですので、題意は満たしていることを確認できました。

以上で、簡単ですが Maxima の紹介と使い方の説明を終わります。Maxima にはまだたくさんの機能・関数が用意されています。ほかの参考書にも目を通して、十分活用してほしいです。

[参考文献]

はじめての Maxima (横田博史著 工学社)

Maxima 入門ノート 1.2.1 (中川義行著 <http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>)