

中間試験 (7/3) にそなえて講義ノートを見直す際に注意してほしいポイントや、講義でゆっくり説明できなかった事項をまとめた。決して、このプリントだけ勉強すれば完璧だというわけではないので、誤解しないように。

そのほか、中間試験にはおそらく出ないけれどもあとで役に立つのではないと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておいてほしい。

粘性流体の基礎知識

非圧縮の粘性流体の運動の支配方程式は、教科書*の式 (40.1) および (40.2)、すなわち

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_{\text{外力}} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (40.1')$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (40.2)$$

与えられる。式 (40.1') を Navier-Stokes 方程式という。ただし質量あたりの外力 $\mathbf{K}$ の代わりに体積あたりの外力 $\mathbf{F}_{\text{外力}} = \rho \mathbf{K}$ を用いた。他の記号については教科書に合わせてあるので各自で確認すること。

練習問題 1

2 次元および 3 次元の場合に対し、式 (40.1')(40.2) を成分表示で書き直せ。

おまけ

圧縮性流体の場合には、式 (40.2) を連続の式 (3.2) で置き換えるのは当然として、さらに p と ρ を結びつける関係式が必要となる。特に気体の場合、理想気体の状態方程式が適用できるものとして

$$p = \rho RT \quad (R \text{ は質量あたりの気体定数})$$

とするのが普通である。この式は温度 T を含むため、さらに内部エネルギーの balance law と連立させる必要がある。

粘性流体の流れの様子は、おもに、Reynolds 数とよばれる無次元パラメータで特徴づけられる (R または Re であらわす)。たとえば直径 $D = 3 \text{ cm}$ の棒が速度 $U = 10 \text{ m/s}$ の水の流れのなかに置かれている場合、Reynolds 数は

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{水}} U D}{\mu_{\text{水}}} = \frac{(10 \text{ m/s})(3 \text{ cm})}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3 \times 10^5 \quad (\#1)$$

となる。ただしここで常温の水の動粘性係数が

$$\frac{\mu_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\#2)$$

であることを用いた。

練習問題 2

速度 U の相対的な大きさを知るために

$$\rho^a \mu^b D^c U$$

の形で無次元になる組み合わせを考える。条件を満たす組み合わせは $(a, b, c) = (1, -1, 1)$ に限られること、それは Reynolds 数にほかならないことを示せ。

常温の空気の密度は水の $1/1000$ 程度、粘性係数は $1/50$ 程度である。したがって動粘性係数は水の 20 倍程度となる (ただし温度によって多少変化する)。具体的な値は、理科年表で調べるか、または教科書の p.186 を見ること。

練習問題 3

他の条件は式 (#1) と同じだとして、水の代わりに空気をを用いた場合の Reynolds 数を計算せよ。

続いて式 (40.1') とともに用いるべき境界条件について考える。粘性流体が物体 (固体壁) に接しているところでは、物体に対する流体の相対速度はゼロでなければならない (これを粘着条件とかすべりなし条件とか言う)。特に、物体が静止している場合には、壁面上での流体の速度はゼロになる。

粘着条件は、完全流体の理論とは両立しないことに注意しよう。流体力学 I で習ったように、完全流体では Lagrange の渦定理が成立するので、たとえば物体を一樣流のなかに置いてできる流れは、渦度がゼロのポテンシャル流れとなる。このような完全流体の理論を用いて物体まわりの流れを求める場合、教科書 §6 のような境界条件を適用する。特に、物体が静止している場合、流体は式 (6.2) を満たすように “物体表面” にそって流れることになる。これは、本当は教科書の図 40.4 のようになっていると考えられる (多少誇張して描いてある)。領域 I では完全流体の理論が適用されるが、物体近傍には、大きな速度勾配をもつ領域 II が存在し、ここでは粘性が無視できない。流れの Reynolds 数が大きい場合、領域 II

* 今井功「流体力学」(岩波書店 物理テキストシリーズ 9)

は物体の寸法に比べて厚さが無視できるような薄い層状の領域になり、境界層と呼ばれる。完全流体での境界条件の式 (6.2) にとっての“物体表面”とは、じつは領域 II の外側のことである。領域 II が物体に接するところでは粘着条件が成立している。

おまけ

粘着条件を認める限り、領域 II が存在しないとすると (すなわち渦度ゼロの領域 I が壁に接しているとする) 矛盾が起きることを示そう。簡単化のため 2 次元で考え、また $\text{div } \mathbf{v} = 0$ とする。壁の近くで

$$\text{div } \mathbf{v} = \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (\text{rot } \mathbf{v})_z = \partial_x v - \partial_y u = 0$$

という式を差分して解いていくと、粘着条件を課す限り、解は $(u, v) = 0$ に決まってしまう。これは物体外部に流れがあるという前提条件に反する。

物体の形によっては、図 40.5 のような状況が発生する。この場合、領域 I にとっての“物体”は、もとの物体とは異なる形になってしまう。このように、Reynolds 数が大きい場合の流れは、非常に難しい問題を含んでいる。

おまけ

図 40.6 は、層流と乱流についての Reynolds の有名な実験を示している。この実験は Reynolds 数という相似パラメータが初めて登場した伝説的な実験であるので、流体力学の常識として知っておいてほしい。もっとも Reynolds の結果を定量的に再現しようとする理論的にも実験的にもデリケートな問題に直面する。その意味でも伝説的な実験と言えるかもしれない。

Navier-Stokes 方程式の立てかた

流体の方程式を立てるときの重要な考え方のひとつは、何らかの保存量 (質量・運動量など) に着目し

$$[\text{次への繰り越し}] - [\text{前回の繰り越し}] \\ = \sum [\text{収入} \cdot \text{支出}] \quad (\#3)$$

という式を立てることである。これを balance law という。収支つりあいの式とか広義の保存則とか言うこともある。

練習問題 4

日常的な事柄で balance law が適用できる例をいくつか挙げよ。

Navier-Stokes 方程式 (40.1') を立てるには、空間に固定された検査体積を用いて運動量収支 (運動量の balance law) を考える。検査体積として微小な直方体 (体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$) を考えると、検査体積内の質量は

$\Delta m = \rho \Delta V$ だから、運動量は

$$\Delta m \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \Delta V$$

となる。運動量収支は、

$$(\rho \mathbf{v})|_{t+\Delta t} \Delta V - (\rho \mathbf{v})|_t \Delta V \\ = \sum [\text{検査体積内の流体が受ける力積}] \quad (\#4)$$

のように書ける (ΔV は時間変化しないことに注意)。

式 (#4) の右辺として、次の 4 つを考慮する:

- 外力 (重力など) による力積
- 圧力による力積
- 粘性応力による力積
- 流体とともに流入する運動量

2 番目と 3 番目は、応力あるいは「面積力」として一緒に扱う場合もあるが、ここでは、いちおう分けておく[†]。4 番目の項は移流項[‡]と呼ばれる。

外力として、たとえば重力を考えると、

$$[\text{重力による力積}] = \rho g \Delta V \Delta t \quad (\#5)$$

である。重力以外の外力の場合も同じような形で書けて、体積あたりの外力の大きさを $\mathbf{F}_{\text{外力}}$ とすると

$$[\text{外力による力積}] = \mathbf{F}_{\text{外力}} \Delta V \Delta t \quad (\#5')$$

のようになる。

続いて圧力項を考える。圧力の特徴は、方向性をもたない (等方的である) こと、すなわち面の方向がどうであって常にも面に垂直な力として作用し、しかも大きさが面の方向に依存せず一定であることである[§]。数学的に言うと、圧力 p はスカラーであり、圧力によって面 ΔS に作用する力のベクトルは、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を用いて

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{圧力}} = -p \mathbf{n} \Delta S \quad (\#6)$$

のように与えられる。これを用いて、 ΔV の 6 つの面にはたらく圧力による力積を求める。講義ノートにあるように、向かい合った面どうしを組み合わせると、結果は

$$[\text{圧力による力積}] = -(\text{grad } p) \Delta V \Delta t \quad (\#7)$$

[†] 流体力学 I の講義との対応を分かりやすくするためである。流体力学 I で扱った Euler 方程式では、圧力は考慮したが、粘性応力は無視できるものとしていた。

[‡] 「対流項」とも言う。対流と言っても、ぐるぐる回る流れという意味ではなく、流れに運ばれるという意味である。

[§] 気泡の実験を思い出そう: 小さな気泡を含む液体に圧力をかけると、気泡は形を保ったまま大きさが小さくなる。

となる。

練習問題 5

式 (#7) の導出過程を示せ。

おまけ

ここでは検査体積として微小な直方体を考えているので、検査面にはたらく力を引き算になるように組み合わせることで、ただちに微分に直すことができる。検査体積が微小でない場合は、教科書 §3 のように、Gauß の定理を用いて微分に直す必要がある。

話の順番は逆になるが、講義ノートに合わせて、4 番目の移流項を先に考える。検査面としてとった直方体の 6 つの面のうち、位置 z にあり (x, y) 面に平行な面を (下) とし、この面に平行で位置 $z + \Delta z$ にある面を (上) としよう。たとえば (下) の面から流入する流体の質量は

$$\Delta m[(\text{下})] = (\rho v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y$$

であり、質量 Δm の流体は運動量 $\Delta m \mathbf{v}$ をもつので、

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{(下) の面から流} \\ \text{入する運動量} \end{array} \right] &= \Delta m[(\text{下})] \mathbf{v}[(\text{下})] \\ &= (\rho v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \times \mathbf{v}|_z \\ &= (\rho \mathbf{v} v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \quad (\#8) \end{aligned}$$

となる。式 (#8) はベクトルであって、その i 成分 ($i = x, y, z$) は「(下) の面から流入する運動量の i 成分」を意味し、

$$\begin{aligned} [\text{式}(\#8) \text{ の } x \text{ 成分}] &= (\rho v_x v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \\ [\text{式}(\#8) \text{ の } y \text{ 成分}] &= (\rho v_y v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \\ [\text{式}(\#8) \text{ の } z \text{ 成分}] &= (\rho v_z v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

である。他のすべての面について運動量の流入を求め、向かい合った面どうしを組み合わせると合計すると

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{流体とともに流} \\ \text{入する運動量} \end{array} \right] &= - \left[\begin{array}{l} \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} \end{array} \right] \Delta V \Delta t \\ &= - \sum_j \left[\begin{array}{l} \frac{\partial_j(\rho v_x v_j)}{\partial_j} \\ \frac{\partial_j(\rho v_y v_j)}{\partial_j} \\ \frac{\partial_j(\rho v_z v_j)}{\partial_j} \end{array} \right] \Delta V \Delta t \quad (\#9) \end{aligned}$$

となる (ここで $\sum$ は $j = x, y, z$ に対する和を示す)。

最後に粘性応力による力積を計算しよう (この項の有無が、流体力学 I で習った Euler 方程式と、流体力学 II で扱う Navier-Stokes 方程式との違いである)。粘性応

力によって面 ΔS に作用する力は、面の方向に依存し、しかも必ずしも $\mathbf{n}$ に平行ではなくて

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{\text{粘性}} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} n_x \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} n_y \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} n_z \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z \end{bmatrix} \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Delta S \quad (\#10) \end{aligned}$$

のようにあらわされる。式 (#6) と式 (#10) の類似点および相違点に注意しよう。力が面積に比例することや面の方向に依存することは同じである。しかし、式 (#6) が p という 1 つのスカラーであらわされるのに対し、式 (#10) は 3×3 の正方行列 (粘性応力テンソル) であらわされる。

練習問題 6

面の方向が $+y$ 方向 (すなわち (z, x) 面に平行で、 $+y$ の側が表側) であるとき、この面に作用する粘性力の x 成分は $\tau_{xy} \Delta S$ であらわされることを説明せよ (ヒント: この面の単位法線ベクトルを式 (#10) に代入)。また、他の面についても同じことを考え、 τ_{ij} のふたつの添字のうちの片方は力の方向を、もう片方は面の方向を示していることを確認せよ。

直方体の 6 つの面のうち、たとえば (上) の面に着目し、その面が受ける粘性力の成分のうち、たとえば y 成分を

$$[(\text{上}) \text{ の面が受ける } y \text{ 方向の力}] = \Delta F_y[(\text{上})]$$

と書くことにしよう。さて

$$\begin{aligned} [(\text{上}) \text{ の単位法線ベクトル}] &= (0, 0, +1) \\ [(\text{下}) \text{ の単位法線ベクトル}] &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

であり、面積はどちらも $\Delta x \Delta y$ だから、式 (#10) より

$$\begin{aligned} \Delta F_y[(\text{上})] &= + \tau_{yz}|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \\ \Delta F_y[(\text{下})] &= - \tau_{yz}|_z \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と求められ、両方の面にはたらく力積の合計は

$$\begin{aligned} &\Delta F_y[(\text{上})] \Delta t + \Delta F_y[(\text{下})] \Delta t \\ &= (\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z) \Delta x \Delta y \Delta t \\ &= \frac{\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \rightarrow \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

となる。さらに (上)(下) 以外の 4 つの面の寄与も含め、また力についても y 成分だけでなく x 成分や z 成分も同様に計算すると

$$\left[\begin{array}{l} \text{粘性応力による力積} \end{array} \right] = \sum_j \left[\begin{array}{l} \frac{\partial_j \tau_{xj}}{\partial_j} \\ \frac{\partial_j \tau_{yj}}{\partial_j} \\ \frac{\partial_j \tau_{zj}}{\partial_j} \end{array} \right] \Delta V \Delta t \quad (\#11)$$

となる。式 (#9) と式 (#11) をよく見ると形が似ていることに注意しよう。

練習問題 7

式 (#11) を $\sum$ なしで書き直せ。

これで式 (#4) の右辺に代入すべき項がすべてそろった、式 (#5)(#7)(#9)(#11) を式 (#4) の右辺に代入し、両辺を $\Delta V \Delta t$ で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとったあと、適当に整理して、運動量収支の式の具体的な形が

$$\partial_t(\rho v_i) + \sum_j \partial_j(\rho v_i v_j) = \rho g_i - \partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{ij} \quad (\#12)$$

のように得られる。ただし粘性応力テンソル τ_{ij} が未知のままなので、これを他の量であらわす式 (構成関係式) を別途求める必要がある。

練習問題 8

式 (#12) を式 (#4) から導出する仮定を、プリントや講義ノートを見ずに[¶]自力で示せ。また、 $\sum$ や省略を用いずに式 (#12) を書き直せ。

練習問題 9

このプリントでの式 (#12) の導出と同じ考え方により、圧縮性流体の場合を含む連続の式

$$\partial_t \rho + \sum_j \partial_j(\rho v_j) = 0 \quad (3.2')$$

を導出せよ。

なお、連続の式 (3.2') を用いると

$$\begin{aligned} [\text{式}(\#12) \text{ の左辺}] &= (\partial_t \rho) v_i + \rho \partial_t v_i \\ &\quad + \sum_j (\partial_j(\rho v_j)) v_i + \sum_j \rho v_j \partial_j v_i \\ &= \rho \left(\partial_t v_i + \sum_j v_j \partial_j v_i \right) \\ &= \rho \frac{Dv_i}{Dt} \end{aligned} \quad (\#13)$$

となり、式 (40.1') の左辺と同じ形になる。

[¶] このように書いてある場合、まずはプリントをよく読んで道筋を把握したあと、プリントを見ずにノートに自力で内容を書いてみる。詰まった場合は、ノートを開いてプリントをちょっとだけ見てから、再びノートを開いてプリントを見ずに進めるところまで進み、またちょっとだけプリントを見て...という具合にするのが良い。

練習問題 10

プリントなどを見ずに、自力で式 (#13) を示せ。

おまけ

式 (#12) は、太字ベクトル記法で書くと

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\#12')$$

のようになる。ここで $\otimes$ はテンソル積、 $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ および $\boldsymbol{\tau}$ はどちらも (2 階の) テンソルであり、 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ と $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ は 2 階のテンソルの発散であるのでベクトルになる。

2 階のテンソルとは、(多少乱暴な言い方をすると) ベクトルとベクトルを結びつける正方行列のことである。もっと乱暴だが分かりやすい言い方としては“ベクトルを成分とするベクトル”と考えてもよい。物理的なベクトルは座標軸の取り方に依拠して見掛けの成分表示が変わるが、ベクトルそのものは変わらない。テンソルについても同じことが言えて、たとえば x 軸と y 軸を入れ替えると xx 成分・ yy 成分・ xy 成分・ yx 成分が入れ替わる。このような挙動を示す正方行列がテンソルである (教科書の §43 の内容を噛み砕いて説明するとこうなる)。

テンソルを含む式は、すべてを書くとき長くなってしまいがちだが、式 (#11) や式 (#12) のように $\sum_j$ を用いると多少は短くなる。さらに「同じ添字が重複しているときは $\sum$ を補って読む」と取り決めて、 $\sum$ を省いてしまうことも多い。この取り決めを Einstein の総和規約という。相対性理論では同じことを 4 回書かないといけないので、Einstein の総和規約が威力を発揮する。簡単な例として、連続の式 (3.2) を相対性理論の方式で書くと

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

という非常に簡潔な式になる。ただし J^μ というのは“ J の μ 乗”ではなく、4 次元のベクトル

$$(J^t, J^x, J^y, J^z) = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)$$

の成分である。(とある事情により添字を上にかいているのだが、それについてはここでは説明しない。興味があれば適当な参考書で調べてみることに。)

単純剪断流における粘性応力

式 (#12) には粘性応力 τ が含まれている。これを具体的な問題に適用するためには、粘性応力 τ を速度 $\mathbf{v}$ に関係づける式 (構成関係式) が必要である。

まずは、粘性流体の流れのなかで最も基本的な単純剪断流 (simple shear flow) の場合について考察しよう。簡単化のため、しばらく 2 次元で考える。流れの方向に x 軸をとると、単純剪断流は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\dot{\gamma} = \text{const.}) \quad (\#14)$$

とあらわされる。

練習問題 11

単純剪断流の速度ベクトル場 (#14) を図示せよ。

式 (#14) の流れは、幅 Δy の“車線”がたくさん並んでいるものとして思い描くことができる。流体における粘性応力とは、“車線”のあいだに速度差があると、隣の流れに引きずられて速度が変化するような効果である*。適当な 2 つの“車線”の境界にそって検査面をとり、この面をとおしてやりとりされる運動量について考えよう。引きずり自体は x 方向の力 (x 方向の加速・減速) であり、検査面の向きは y 方向であるから、応力テンソルの成分としては τ_{xy} について考えることになる。このような場合、通常の流体では、 τ_{xy} は速度勾配 $\partial_y u (= \dot{\gamma})$ に比例することが知られている。したがって、比例係数を μ と置くと、

$$\text{単純剪断流の場合: } \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \dot{\gamma} \quad (\#15)$$

と書ける。係数 μ は粘性係数と呼ばれる。

練習問題 12

なぜ式 (#15) は $\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}$ であって $\dot{\gamma} = \mu \tau_{xy}$ ではないのか? 係数 μ の値が非常に大きい場合や非常に小さい場合を考えることにより、比例係数の置き方に込められた意味を説明せよ。

歪みテンソルと歪み速度テンソル

続いて式 (#15) を一般化し、任意の流れに対して粘性応力テンソルの各成分を求められるようにする。そのためには、流体の変形を歪み速度テンソルという形で数学的にあらわす必要がある。ただし、変形を考察するには、流体よりも弾性体のほうが考えやすいので、まずはそこから先に考えてみる。

弾性体の変形

消しゴムに半径 r_0 の円を描き、消しゴムを適当に変形させて、円がどうなるか観察しよう。変形前の各点の位置を $\mathbf{X}$ 、変形後の位置を $\mathbf{x}$ と置き、

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

として、変形を

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\#16)$$

という線形写像であらわす (α_{ij} がすべてゼロの場合が恒等写像すなわち“変形なし”になるように、対角成分に 1 を含めてある)。一般には円の中心が原点に止まっている

* ただし実際に道路があるわけではないので、自動車の場合と違って対地速度は問題ではなく、問題となるのは隣の車線との相対速度である。

とは限らないので、本当は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix}$$

と書くべきだが、簡単化のため、式 (#16) で考えることにしよう。

弾性体を構成するそれぞれの点について、変形前および変形後の状態における原点からの距離の 2 乗を

$$\text{変形前: } Q = X^2 + Y^2$$

$$\text{変形後: } q = x^2 + y^2$$

であらわす。変形前に半径 r_0 の円周上にあった点は

$$X^2 + Y^2 = r_0^2 \quad \text{すなわち} \quad Q = r_0^2 \quad (\#17)$$

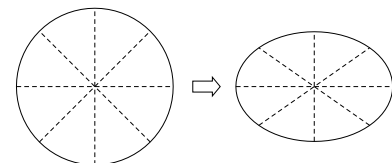
という条件を満たす。この円は、変形後には一般には楕円になる。楕円の方法は、制約条件 (#17) のもとで q の最大値・最小値を求めれば知ることができる。

● 一軸伸長または一軸圧縮

消しゴムを Y 方向に伸長 ($\alpha_{22} > 0$) または圧縮 ($\alpha_{22} < 0$) し、 X 方向には変形しないように保ったとすると、 $a = 1 + \alpha_{22}$ として

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\#18)$$

となる。変形後の形は明らかに楕円で、その軸は X 軸および Y 軸に一致する。



式 (#18) より

$$q = X^2 + a^2 Y^2 \quad (\#19)$$

このとき、 q が最大または最小になる位置は

$$\begin{aligned} (X, Y) &= (\pm r_0, 0), & q &= Q; \\ (X, Y) &= (0, \pm r_0), & q &= a^2 Q. \end{aligned}$$

● 単純剪断変形

式 (#16) の α_{ij} のうち、 α_{12} だけがゼロでない値 γ をもち、他の成分はすべてゼロだとする:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \quad (\#20)$$

簡単化のため $|\gamma| \ll 1$ とし、 γ^2 を無視する[†]。このとき

$$q = X^2 + 2\gamma XY + Y^2 \quad (\#21)$$

[†] ただし γ が有限でも解析は可能だが、ここでは扱わない。

となり、この q が最大または最小になる位置が分かれば楕円の方向が分かる。今の場合、式 (#17) より $(X, Y) = (r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta)$ と置いて代入して求めてもよいが、もっと一般的に使える方法を考えてみよう。式 (#17) を制約条件として q の最大値・最小値を求める問題だから、Lagrange の未定乗数法が使える[‡]。これによると、 λ を未定乗数として、 q の最大値および最小値 (の候補) は

$$dq - \lambda dQ = 0 \quad (\#22)$$

により求められる。式 (#21) に対して式 (#22) を具体的に計算し整理すると

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (\lambda - 1) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\#23)$$

という固有値問題になる。

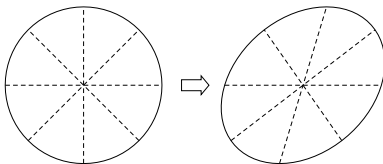
練習問題 13

式 (#20) から式 (#23) に至る過程を、講義ノートやプリントを見ずに自力で再現せよ。

変形後の楕円の形についての情報は、式 (#23) の左辺の行列に含まれている。固有ベクトルを求め、規格化条件 (#17) を考慮すると、 q が最大または最小になる点について

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (\#24)$$

という結果が得られる。すなわち、変形前には円だったものが、変形後には斜め 45 度の方向を軸とする楕円になる[§]。伸長倍率は、それぞれの軸に対して $1 \pm \gamma/2$ 倍となる。



● 一般的な 2 次元変形

式 (#16) に従う変形を一般的に考える。ただし α は微小であるものとし、2 次の項を無視する。式 (#21) と同様に q を計算すると

$$\begin{aligned} q &= Q + [X \ Y] \begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & \alpha_{12} + \alpha_{21} \\ \alpha_{21} + \alpha_{12} & 2\alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= Q + 2 \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} X_i X_j \end{aligned} \quad (\#25)$$

[‡] 微積分学の教科書を見よ。

[§] 正確に言えば、 (X, Y) 座標系では 45 度方向であるが、 (x, y) 座標系ではそれから $\gamma/2$ だけずれた方向になる。しかし γ は微小だから結果の差はわずかである。

と書ける。ただし

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \quad (\#26)$$

と置いた。ここで式 (#22) を用いて q が最大または最小になる必要条件を求めると

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \lambda' = \frac{\lambda - 1}{2}$$

という固有値問題になる。式 (#23) の場合と同じく、行列 ε に、変形後の楕円の形についての情報が含まれている。定義式 (#26) により ε は対称行列なので、固有ベクトルは必ず直交する[¶]。

2 つの固有ベクトルを $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ としよう (規格化して $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = 1$ としておく)。固有ベクトルにそって $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ 座標系をとり、

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \tilde{X}_1 \mathbf{b}_1 + \tilde{X}_2 \mathbf{b}_2$$

のように座標変換する。これを式 (#25) に代入し、 q を $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ であらわす:

$$\begin{aligned} q &= Q + 2 [X \ Y] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} (\tilde{X}_1 \mathbf{b}_1 + \tilde{X}_2 \mathbf{b}_2) \\ &= \dots \\ &= (1 + \lambda'_1)^2 \tilde{X}_1^2 + (1 + \lambda'_2)^2 \tilde{X}_2^2 \end{aligned} \quad (\#27)$$

ただし λ' は小さいと考えて λ'^2 を無視する近似をおこなった。これは基本的に式 (#19) と同じ形であり、 $\tilde{X}_1$ 軸の方向 ($\mathbf{b}_1$ の方向) に $(1 + \lambda'_1)$ 倍、 $\tilde{X}_2$ 軸の方向 ($\mathbf{b}_2$ の方向) に $(1 + \lambda'_2)$ 倍だけ伸長するような変形をあらわす。

以上の例から、円は一般に楕円になること、楕円の軸は式 (#26) で定められる対称行列 ε の固有ベクトルの方向に一致することが分かる。式 (#26) で定められる ε を歪みテンソルという。また、対称行列であらわされるテンソル (ここでは ε) に対し、その固有ベクトル $\{\mathbf{b}_i\}$ の方向にとった軸のことを主軸という。式 (#27) は、楕円の軸が歪みテンソル ε の主軸と一致することを示している。

おまけ

変形は、密度や体積 (2 次元であれば面積) の変化を伴う場合もあれば、伴わない場合もある。これについて、まずは 2 次元で考えてみよう。主軸方向の伸長倍率は、 ε の固有値 λ' を用いて $1 + \lambda'$ で与えられるので、

$$[\text{面積の倍率}] = (1 + \lambda'_1)(1 + \lambda'_2) = 1 + \lambda'_1 + \lambda'_2$$

となる (ただし $|\lambda'| \ll 1$ として 2 次の項を無視した)。ここで、固有方程式 $\lambda'^2 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\lambda' + \det \varepsilon = 0$ における根と係数の関係より

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$$

[¶] 線形代数の教科書を見よ。なお、固有値が重根になった場合は、Schmidt の直交化を用いればよい。

だから、 $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ が分かれば面積の倍率が分かる。弾性変形による各点の変位を

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\#28)$$

と書き、式 (#28) から α_{ij} を求めて式 (#26) に代入すると

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial X} + \frac{\partial \xi_2}{\partial Y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial Y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial X} \right) \end{bmatrix} \quad (\#29)$$

となるので、変形による面積の変化について

$$[\text{面積の倍率}] = 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial X} + \frac{\partial \xi_2}{\partial Y} = 1 + \text{div } \xi \quad (\#30)$$

という結論が得られる。

3 次元の場合でも本質的な結果は同じであり、球が変形して楕円球になること、体積の倍率が $1 + \text{div } \xi$ であることが示される。具体的には、式 (#16) を 3 次元に拡張し、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \quad (\#26)$$

によって歪みテンソル ε を定めて、その固有値問題を解く。体積の倍率は

$$(1 + \lambda'_1)(1 + \lambda'_2)(1 + \lambda'_3) = 1 + \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3$$

であり、ここで固有方程式 (今の場合は 3 次方程式) の根と係数の関係を用いると、この倍率が $1 + \text{div } \xi$ に等しいことが示される。すなわち、弾性体では

$\text{div } \xi > 0$: 膨張

$\text{div } \xi < 0$: 収縮 (圧縮)

$\text{div } \xi = 0$: 体積変化なし。

流体の変形

弾性体では“変形前”と“変形後”にどんなに時間差があってもよいが、流体というものは昔の形をおぼえていないので、変形前後の時間差としては微小時間 Δt を考えるべきである。つまり、弾性体における

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\#16')$$

の代わりに、流体では

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_t - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_{t-\Delta t} = \mathbf{v} \Delta t = \dots$$

という一瞬の差を考える。ある流体要素の近傍に着目し、場所による速度の違いを Taylor 展開の 1 次まで考慮すると

$$\mathbf{v} \Delta t = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \Delta t \quad (44.1')$$

と書ける。行列 L は

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \partial_j v_i \quad (\#31)$$

で与えられ、これを速度勾配テンソルという。以下、簡単化のため、着目している領域の中心 (x_0, y_0) は原点 $(0, 0)$ にあるものとしよう。変形前および変形後における“原点”からの距離は

$$Q = (x^2 + y^2) \Big|_{t-\Delta t}$$

$$q = (x^2 + y^2) \Big|_t$$

とあらわされ、これから、弾性体での式 (#25) と同様の手順により

$$q = Q + 2\Delta t \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij} X_i X_j \quad (\#32)$$

という式が得られる。ここで $\dot{\varepsilon}$ は

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (\#33)$$

で定められる歪み速度テンソルである。歪み速度テンソルの固有値と固有ベクトルを求めれば、ある瞬間に円 (または球) だったものが、次の瞬間にどのように歪むかが分かる。

おまけ

式 (#32) から、体積は $1 + (\text{div } \mathbf{v})\Delta t$ 倍になることが示される。すなわち

$\text{div } \mathbf{v} > 0$: 膨張

$\text{div } \mathbf{v} < 0$: 収縮 (圧縮)

$\text{div } \mathbf{v} = 0$: 体積変化なし。

練習問題 14

次のそれぞれの例について、 q と Q の関係を具体的に求め、ある瞬間に円だったものが次の瞬間にどの方向に引き延ばされるかを計算せよ。ただし、 a は適当な次元をもつ正の定数である。

(あ) $(u, v) = (2ax + 3ay, -2ay)$

(い) $(u, v) = (a(x + y), a(\frac{5}{3}x - y))$

(う) $(u, v) = (a(x + \frac{1}{2}y), a(x - y))$

構成関係式

歪み速度テンソル $\dot{\varepsilon}$ は、流れをあらわす速度ベクトル場から、流れによる変形の情報を抽出したものだと言える。この歪み速度テンソルを粘性応力テンソルに関係づける式 (構成関係式) が得られれば、最終的に Navier-Stokes 方程式 (40.1') が導出できる。

ここで求める構成関係式は、式 (#15) の一般化であるから、単純剪断流の速度場 (#14) を代入した場合には式 (#15) と一致するようなものでなければならない。手がかりを見つめるため、式 (#14) に対して歪み速度テンソ

ルを計算してみると

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\#34)$$

となり、特に $\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\gamma}/2$ である。これと式 (#15) を見比べると、

$$\tau_{xy} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{xy} \quad (\#35)$$

という関係が成り立っている。関係式 (#35) は、単純剪断流という特定の流れに対して、しかも τ の 9 個の成分のうち τ_{xy} に限定して得られた式であるが、左辺と右辺の添字がうまい具合に一致していることから、一般的に、 τ のすべての成分に対して

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (\#36)$$

が成り立つのではないかと考えられる。実際、詳しい考察により、式 (#36) は、非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) の粘性流体に対しては正しいということが示される (圧縮性のある場合は式 (#43) のようになる)。式 (#36) に式 (#33) を代入し、

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (\#37)$$

すなわち

$$\tau = \mu \begin{bmatrix} 2\partial_x v_x & \partial_x v_y + \partial_y v_x & \partial_x v_z + \partial_z v_x \\ \partial_y v_x + \partial_x v_y & 2\partial_y v_y & \partial_y v_z + \partial_z v_y \\ \partial_z v_x + \partial_x v_z & \partial_z v_y + \partial_y v_z & 2\partial_z v_z \end{bmatrix}$$

という結果を得る。これが非圧縮の粘性流体の構成関係式である。

練習問題 15

例 (a)(i)(u) に対し、構成関係式 (#37) を用いて粘性応力テンソルを計算せよ。

最後に、式 (#37) を運動量収支の式 (#12) に代入する。とりあえず x 成分を考え、 μ は定数だとして

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_j \tau_{xj} &= \partial_x (2\mu\partial_x v_x) + \partial_y (\mu(\partial_x v_y + \partial_y v_x)) \\ &\quad + \partial_z (\mu(\partial_x v_z + \partial_z v_x)) \\ &= \mu \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} \left(\partial_x \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} v_x \right) \\ &= \mu \partial_x \text{div } \mathbf{v} + \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) v_x \\ &= \mu \Delta v_x \end{aligned} \quad (\#38)$$

を得る。さらに y 成分や z 成分についても同様に考えると、式 (40.1') と一致する結果が得られる。

練習問題 16

プリントを見ずに、自力で式 (#38) の計算過程を再現せよ。さらに、運動量の y 成分および z についても、式 (#38) に相当する式を書き下し、これにより式 (40.1') を導出せよ。

おまけ

非圧縮とは限らない場合について、粘性流体の構成関係式を求めてみよう。この場合にも、弾性体の構成関係式が参考になる。弾性体の応力については次のことが言える:

- 楕円球を球に戻す方向に作用する。
- 体積変化に対しては等方的な復元力を生じる。
- Hooke の法則に従う (応力は歪みに比例^{||})。

形の変化と体積変化を別々に考えるため、歪みテンソル ε を

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \xi)\delta_{ij}) + \frac{1}{3}(\text{div } \xi)\delta_{ij} \quad (\#39)$$

のように 2 つの部分に分ける。第 1 項の固有値を計算すると、それぞれの主軸方向への伸長倍率が

$$1 + \lambda'_1 - \frac{1}{3} \text{div } \xi, \quad 1 + \lambda'_2 - \frac{1}{3} \text{div } \xi, \quad 1 + \lambda'_3 - \frac{1}{3} \text{div } \xi$$

のように求められ、これから体積の倍率を計算すると 1 倍 (変化なし) となる。つまり、式 (#39) の第 1 項は、体積変化なしで形だけが変わるような変化を示している。他方、式 (#39) の第 2 項では、すべての方向に対して伸長倍率が $1 + (\text{div } \xi)/3$ 倍となり、等方的な膨張または圧縮を示している。

弾性体の応力テンソルを σ_{ij} としよう。弾性体の微小変形に対する運動方程式および構成関係式は、

$$\rho \partial_t^2 \xi_i = (\text{外力}) + \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \quad (\#40)$$

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \xi)\delta_{ij}) + K(\text{div } \xi)\delta_{ij} \quad (\#41)$$

で与えられる。すなわち、応力テンソル σ は、式 (#39) の第 1 項と第 2 項の線形結合で与えられる。

粘性流体の場合には、歪み速度テンソル $\dot{\varepsilon}$ を、

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij}) + \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (\#42)$$

のように 2 つに分ける。第 1 項は形の変化、第 2 項は体積変化を示す。これらの項の線形結合により、粘性応力テンソルは

$$\tau_{ij} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij}) + \mu'(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (\#43)$$

という式で与えられる。係数 μ は粘性率 (粘性係数)、 μ' は体積粘性率と呼ばれる。式 (#43) に式 (#33) を代入すると

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) + (\mu' - \frac{2}{3}\mu)(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (\#44)$$

となり、これが圧縮性のある場合まで含めた粘性流体の構成関係式である。特に非圧縮流体の場合は、式 (40.2) を代入すると、式 (#37) に帰着することが確認できる。

^{||} 比例というのは、決して τ が ε のスカラー倍になるという意味ではない。ところが某大学では、これを理解できない教授が、新理論と称して、間違った Hooke の法則を堂々と教えているらしい。「Hooke Stokes 新たな支配方程式」で検索をかけてみよう。