

期末試験 (7/31) にそなえて講義ノートや小テストを見直す際に注意してほしいポイントや講義で説明しきれなかった事項をまとめた。そのほか、前回の補足資料と同様、試験にはおそらく出ないけれどもあとで役に立つのではないかとと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておいてほしい。
この資料は、流体力学 II のホームページ (<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/fluid/>) からダウンロードできるようにする予定である。

まずは基礎知識を確認

何も見ないで以下のものを書いてみよう。ただし、簡単化のため、密度一定の非圧縮流体に限定する。

- 連続の式
[書けなかった場合 教科書の式 (3.4)]
- Navier-Stokes 方程式 (太字ベクトル表記)
[書けなかった場合 補足資料 (6/29)]
- Navier-Stokes 方程式 (3 次元で成分表示)
[書けなかった場合 講義ノート・小テスト (6/19)]
- Reynolds 数
[書けなかった場合 教科書の式 (40.6), (45.8)]
- 水の動粘性係数 (単位も含めて)
[書けなかった場合 教科書 p.186]

Navier-Stokes 方程式は、単に丸暗記するよりも、各項の意味を確認しながらおぼえるほうが間違いが少ない。流体力学 I の講義ノート (Euler 方程式の各項の意味) や、前回の補足資料 (Navier-Stokes 方程式の導出) などを見て、それぞれの項が何をあらわしているのかを確認しておこう。

練習問題 1

流体の運動量に関する balance law を考えると

$$\partial_t(\rho u_i) + \sum_j \partial_j(\rho u_i u_j) = F_i^{(ex)} - \partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{ij}$$

という式が得られる。各項の意味を説明せよ。さらに、 $\tau_{ij} = \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ を代入し整理すると

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F}^{(ex)} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (*1)$$

のようにまとめられることを示せ。

練習問題 2

$\nabla \cdot \mathbf{u}$ と $\mathbf{u} \cdot \nabla$ の違いについて説明せよ。また、 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ と $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ の違いについて説明せよ。

練習問題 3

外力として重力のみを受ける非圧縮粘性流体の場合、Navier-Stokes 方程式および連続の式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (*2)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (*3)$$

のように書ける。座標系を 3 次元デカルト座標系とし、 $\mathbf{g} = (g \sin \theta, 0, -g \cos \theta)$ として、式 (*2)(*3) を成分表示で書き下せ。

練習問題 4

身の回りで生じる適当な流れを例にとり、流れの代表長さ L および流速 U をおおざっぱに見積もって、Reynolds 数を概算せよ。

ベクトル解析

高校で習うような微分や積分の計算は、意味を考えなくても公式として覚えれば何とかなるようなものだったかもしれない。しかし、ベクトルが関与するような複雑な微分になってくると、そのような方針はもはや通用しない。最も基本的な微分の定義式である

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

に戻り、その“分母を払って”得られる

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad (*4)$$

という式*を出発点として、ベクトル解析の基礎事項について確認しておこう。

勾配とナブラ演算子

式 (*4) を拡張して、変数 x を位置ベクトル \mathbf{r} で置き換えた式を考える。位置の差である Δx は $\Delta \mathbf{r}$ におきかわり、内積のドットを用いて

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = (\text{grad } f) \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (*5)$$

と書ける (もちろん $\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$)。このようにして定められる $\text{grad } f$ を「 f の勾配 (gradient)」という。式 (*5) を、偏微分の基本な関係式である

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

と見比べることにより、

$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (*6)$$

を得る (もちろん ∂_x は $\partial/\partial x$ の略記)

勾配の式 (*6) は、ナブラ演算子

$$\nabla = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*7)$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f \quad (*8)$$

のように書ける。なお、演算子を含む式では順番が重要であって、うかつに並べかえてはいけないことに注意しよう。

練習問題 5

$\nabla(pq)$ と $p\nabla q$ は 一般には等しくないことを示せ。

ベクトル場の微分

あるベクトル場 \mathbf{u} が与えられているものとしよう。ナブラ演算子 ∇ を用いると、ベクトル場 \mathbf{u} の発散 (divergence) および回転 (rotation) は

$$\text{発散: } \text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (*9)$$

$$\text{回転: } \text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (*10)$$

* ここでは、分かりやすくするために、lim に関する数学的厳密性を無視して話を進める。そんないいかげんなことでは困る、という人は、きちんとした証明の載っている数学の本を見て、ここでの説明との対応を考えること。

のように書ける。

スカラー場 f の勾配は式 (*8) で与えられ、その結果はベクトル場になる。ベクトル場 \mathbf{u} に対しても勾配 $\text{grad } \mathbf{u}$ を求めることは可能だが、その結果は、ベクトルでもスカラーでもなく、2 階テンソルになる。

Laplace 演算子 (Laplacian) は ∇^2 または Δ によってあらわされ、スカラー場に対しては

$$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div grad } f \quad (*11)$$

で与えられる。デカルト座標でのナブラ演算子の式 (*7) を用いて計算すると

$$\Delta f = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f \quad (*12)$$

となることが分かる。

ベクトル場に対しても、式 (*11) をそのまま用いることは一応可能だが、その場合、

$$\Delta \mathbf{u} = \text{div}(\text{grad } \mathbf{u}) \quad (*13)$$

のように、計算の途中で 2 階テンソル $\text{grad } \mathbf{u}$ を経由することになる。これはデカルト座標以外の座標系では面倒なことになるので、それを避けるためには、ベクトル場の Laplacian は

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= -\text{rot rot } \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} \\ &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (*14)$$

のように計算するほうがよい。特に、もし $\text{div } \mathbf{u} = 0$ であることがあらかじめ分かっているなら、計算するのは第 1 項だけでよいことになる。

円柱座標でのベクトル解析

円柱座標の書き方は場合によって微妙に異なるが[†]、ここでは位置ベクトルが

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix} \quad (*15)$$

のようにあらわされるものとして話を進める。

近接した 2 点 A および B を考え、両者の相対位置ベクトル $\Delta \mathbf{r}$ をあらわす式を求めよう。点 A の位置

[†] たとえば円柱の軸を x 方向とするか z 方向とするか、など。

ベクトル $\vec{OA} = \mathbf{r}$ は式 (*15) そのものであらわされるとし、点 B の位置ベクトルを

$$\vec{OB} = \begin{bmatrix} (r + \Delta r) \cos(\theta + \Delta\theta) \\ (r + \Delta r) \sin(\theta + \Delta\theta) \\ z + \Delta z \end{bmatrix} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$$

とする。相対位置ベクトル $\Delta\mathbf{r}$ は、偏微分を用いて

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \Delta\theta + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} \Delta z \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r + \begin{bmatrix} -r \sin\theta \\ r \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta z \quad (*16) \end{aligned}$$

のように求められ、さらに、式 (*16) は、

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*17)$$

を導入することにより

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_r \Delta r + r \mathbf{e}_\theta \Delta\theta + \mathbf{e}_z \Delta z \quad (*16')$$

のようにあらわされる。

練習問題 6

位置ベクトル \mathbf{r} と、式 (*17) で導入された 3 本のベクトルの位置関係を図示せよ。ただし、 $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ の始点は \mathbf{r} の終点に一致させて図示する。

練習問題 7

$\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ が互いに直交していることを内積の計算によって確認せよ。また、外積を計算し、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r &= -\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

となることを確認せよ。

デカルト座標での $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ が \mathbf{r} によらず一定の方向を指すのとは異なり、 \mathbf{e}_r や \mathbf{e}_θ は、 \mathbf{r} の動きとともに方向が変化する。特に、次の式が成り立つ：

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r. \quad (*18)$$

練習問題 8

式 (*18) が成立することを確認せよ。

続いて、任意のスカラー場 f に対し、

$$f(B) - f(A) = (\text{grad } f) \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (*5')$$

により $\text{grad } f$ を定める。式 (*5') に式 (*16') を代入したものを、偏微分の関係式

$$\begin{aligned} f(B) - f(A) &= f(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z) - f(r, \theta, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial f}{\partial\theta} \Delta\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \end{aligned}$$

と見比べることにより、

$$\mathbf{e}_r \cdot \text{grad } f = \partial_r f \quad (*19a)$$

$$r \mathbf{e}_\theta \cdot \text{grad } f = \partial_\theta f \quad (*19b)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \text{grad } f = \partial_z f \quad (*19c)$$

を得る。方程式 (*19) は、ベクトル $\text{grad } f$ を定める連立一次方程式になっていて、その解は

$$\text{grad } f = \mathbf{e}_r \partial_r f + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta f + \mathbf{e}_z \partial_z f. \quad (*20)$$

したがって、円柱座標でのナブラ演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*21)$$

となることが分かる。

練習問題 9

式 (*20) を方程式 (*19) に代入すると、たしかに等号が成立することを確認せよ。

おまけ

式 (*20) を求める別の方法として、連鎖則による関係式

$$\nabla f = (\nabla r) \frac{\partial f}{\partial r} + (\nabla \theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} + (\nabla z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

を直接用いるという手もある。式 (*15) を逆に解くと

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

であり、これにより、たとえば ∇r が

$$\nabla r = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

のように計算できて、これから式 (*20) が得られる。

さて、ベクトル場 \mathbf{u} が

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z \quad (*22)$$

のように与えられているものとしよう。各変数の位置依存性については最も一般性の高い場合を考え、

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, \theta, z) \\ u_\theta &= u_\theta(r, \theta, z) \\ u_z &= u_z(r, \theta, z) \end{aligned}$$

とする。

円柱座標におけるナブラの式 (*21) を用いて $\text{div } \mathbf{u}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \partial_r (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \mathbf{e}_z \cdot \partial_z (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \quad (*23) \end{aligned}$$

となるが、このなかで ∂_θ の項について特に注意が必要である。ベクトル \mathbf{e}_r および \mathbf{e}_θ は θ によって変化することを考慮し、式 (*18) を用いると

$$\begin{aligned} \partial_\theta (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) &= (\partial_\theta u_r) \mathbf{e}_r + u_r \partial_\theta \mathbf{e}_r \\ &\quad + (\partial_\theta u_\theta) \mathbf{e}_\theta + u_\theta \partial_\theta \mathbf{e}_\theta + (\partial_\theta u_z) \mathbf{e}_z \\ &= (\partial_\theta u_r - u_\theta) \mathbf{e}_r + (\partial_\theta u_\theta + u_r) \mathbf{e}_\theta + (\partial_\theta u_z) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となる。さらに $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ が互いに直交する単位ベクトルであることを用いると

$$\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) = \frac{\partial_\theta u_\theta + u_r}{r} \quad (*24)$$

のように計算できる。他の項についても同様に計算し、結果を式 (*23) に代入して整理すると

$$\text{div } \mathbf{u} = \partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z \quad (*25)$$

となる[‡]。重要なことは、 \mathbf{e}_r や \mathbf{e}_θ が θ によって変化するために、式 (*25) に u_r/r という項が出現することである。

式 (*23) と同じ方法で $\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$ が計算できる。一般的な場合の計算は項が多くて大変だが、 \mathbf{u} の形に制約条件をつけて、たとえば

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_z, \quad u = u(r) \quad (*26)$$

[‡] ただしこれは最も一般性が高い場合の式であり、何らかの制約条件 (たとえば $\partial_\theta u_\theta = 0$ とか) がつけばもっと簡単な式になる場合もある。

とすると、 $\text{rot } \mathbf{u}$ は

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r (u \mathbf{e}_z) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \partial_\theta (u \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \mathbf{e}_z \times \partial_z (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times (\partial_r u) \mathbf{e}_z + \mathbf{0} + \mathbf{0} = -\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (*27) \end{aligned}$$

のように求められる。

練習問題 10

速度ベクトルが、円柱座標により

$$\mathbf{u} = v \mathbf{e}_\theta, \quad v = v(r)$$

のように与えられている場合について、

$$\text{rot } \mathbf{u} = (\partial_r v + v/r) \mathbf{e}_z$$

であることを示せ。

Laplacian は、スカラー場に対しては式 (*11) によって、また、ベクトル場に対しては式 (*14) によって計算できる。

円柱座標での連続の式の直接的導出

連続の式は、もちろん式 (*3) すなわち $\text{div } \mathbf{u} = 0$ に式 (*25) を代入して

$$\partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z = 0 \quad (*28)$$

のように書き下せる。他方、連続の式はもともと質量に対する balance law から出てきたのだから、円柱座標で balance law を考えることにより式 (*28) を直接導出することもできる。

円柱座標にそって空間を微小領域に分割し、そのひとつひとつを検査体積として、質量についての balance law を考えよう。なお、簡単化のため、最初から $\rho = \text{const.}$ とする。微小要素の 6 つの面に対し

- 内 = 位置 r にある $-\mathbf{e}_r$ 方向の面
- 外 = 位置 $r + \Delta r$ にある $+\mathbf{e}_r$ 方向の面
- 右 = 位置 θ にある $-\mathbf{e}_\theta$ 方向の面
- 左 = 位置 $\theta + \Delta \theta$ にある $+\mathbf{e}_\theta$ 方向の面
- 下 = 位置 z にある $-\mathbf{e}_z$ 方向の面
- 上 = 位置 $z + \Delta z$ にある $+\mathbf{e}_z$ 方向の面

のように名前をつける。デカルト座標系の場合とは違って、向かい合った面の面積は等しいとは限らない。実際、(内)よりも(外)のほうが面積が大きく、これらの面積を $\Delta S[(内)]$ および $\Delta S[(外)]$ とすると

$$\begin{aligned}\Delta S[(内)] &= r\Delta\theta\Delta z \\ \Delta S[(外)] &= (r + \Delta r)\Delta\theta\Delta z\end{aligned}$$

である。それぞれの面から流入する流体の体積は

$$\begin{aligned}+(u_r|_{内} \Delta t)\Delta S[(内)] &= +r u_r|_r \Delta\theta\Delta z\Delta t \\ -(u_r|_{外} \Delta t)\Delta S[(外)] &= -(r + \Delta r) u_r|_{r+\Delta r} \Delta\theta\Delta z\Delta t\end{aligned}$$

のように計算され、したがって

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{l} (内) と (外) \\ \text{の質量流入} \\ \text{量の合計} \end{array} \right] &= \rho (r u_r|_r - (r + \Delta r) u_r|_{r+\Delta r}) \Delta\theta\Delta z\Delta t \\ &= -\rho \frac{(r + \Delta r) u_r|_{r+\Delta r} - r u_r|_r}{\Delta r} \frac{\Delta V \Delta t}{r + \frac{1}{2}\Delta r} \\ &\rightarrow -\rho \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \frac{\Delta V \Delta t}{r} \quad (*29)\end{aligned}$$

となる。なお、検査面で囲まれる領域の体積が

$$\Delta V = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r \right) \Delta r \Delta\theta\Delta z$$

であることを用いた。

他の 2 組の面についても同様のことをおこない、検査体積内の質量の収支について

$$\begin{aligned}(\rho\Delta V)|_{t+\Delta t} &= (\rho\Delta V)|_t \\ &+ \rho \left[\frac{1}{r}\partial_r(r u_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z \right] \Delta V \Delta t\end{aligned}$$

という式を得る。ここで、密度は一定だとしているから $(\rho\Delta V)|_{t+\Delta t} = (\rho\Delta V)|_t$ であり、したがって右辺のカッコのなかの式はゼロでなければならない。積の微分を展開し、式 (*28) と同じものを得る。

練習問題 11

円柱座標で表した連続の式 (*28) の導出過程を、講義ノートもプリントも見ないで自力で再現せよ。

練習問題 12

圧縮性流体の流れについて、速度が常に r 方向に平行であり、なおかつ密度も速度も θ や z に依存せず

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r, \quad u = u(r, t); \quad \rho = \rho(r, t)$$

と書ける場合を考える。この場合、連続の式は

$$\partial_t(r\rho) + \partial_r(r\rho u) = 0$$

となることを示せ。

Navier–Stokes 方程式の解

Euler 方程式や Navier–Stokes 方程式は、速度 \mathbf{u} について 2 次の項を含む、非線形の偏微分方程式である。そのため、一般解を求めることはほとんど不可能だと考えられる。しかし、何らかの制約条件の枠内であれば*、解を求めることは可能である。

平行流

もっとも基本的な場合として、

速度ベクトルが常にある方向に平行である

という制約条件を課した場合を考える。このような制約条件を満たす流れのことを平行流とか一方向流れとかいう (教科書 §46 を見よ)。

練習問題 13

Navier–Stokes 方程式 (*1) で外力がゼロの場合を考える。速度がつねに z 方向に平行であるという条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか? ただし流れは必ずしも定常ではないものとする。

方針: まずは速度ベクトルを $\mathbf{u} = (u, v, w)$ として、式 (*1) および連続の式を具体的に成分表示で書き下す。次に、 u や v はゼロなので、それらを含む項をすべて消す。すると連続の式から $\partial_z w = 0$ となるので、これを用いてさらに項を消す。最終的には、圧力の式と速度の式に分離できる形になる。

* Euler 方程式の場合は「ポテンシャル流れ」(非回転流れ)という制約条件を課すことで、さまざまな解を求めることができた。残念ながら、Navier–Stokes 方程式で同じことをしようすると、粘着条件と矛盾してしまい、意味のある解が得られない。したがって別の手を考える必要がある。

練習問題 14

重力項を含む Navier–Stokes 方程式 (*2) において、流れは定常であるものとし、さらに速度が常に x 軸に平行であるという制約条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか?

平行流において、Navier–Stokes 方程式は大幅に簡単化される。非定常の場合の方程式は、実質的に熱伝導方程式 (あるいは拡散方程式) と同じものになり、したがって偏微分方程式の教科書に載っている解法 (固有関数展開など) で解ける。定常の場合には方程式はさらに簡単になり、最も単純な場合には線形 2 階 ODE に帰着する。

さて微分方程式を解いて速度を求めるには、境界条件を具体的に知る必要がある。

- 壁がある場合には、粘着条件により、壁に対する流体の相対速度はゼロになる。もう少し詳しく言うと、壁が静止している場合は壁際での流体の速度はゼロとなり、壁が速度 U で動いている場合は流体もそれと同じ速度で動く。
- 自由表面においては、流体の法線応力が外界の圧力 (大気圧) とつりあい、接線応力は (つりあう相手が無いので) ゼロとなる。

たとえば、速度を $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ とし、また、考えている境界面は y 軸に直交する (つまり $y = \text{const.}$ の形で書ける) ものとする。このとき、速度 u に対する境界条件は、次のようにまとめられる[†]:

$$\text{静止した壁: } u|_{\text{境界}} = 0 \quad (*30)$$

$$\text{速度 } U \text{ で動く壁: } u|_{\text{境界}} = U \quad (*31)$$

$$\text{自由表面: } \partial_y u|_{\text{境界}} = 0 \quad (*32)$$

もちろん、たとえば速度場が $\mathbf{u} = (0, 0, w)$ で、自由表面の位置が $y = \text{const.}$ でなく $x = \text{const.}$ だった

[†] 平行流という限定条件がついていることに注意。この限定条件がない場合は、もう少し複雑なことを考えなければならない。特に、自由表面境界条件は、表面の法線ベクトルと粘性応力テンソルを用いて書く必要があるし、表面が曲がっているなら表面張力も考えることになる。

ら、境界条件は $\partial_x w|_{\text{境界}} = 0$ のように読み替える。

練習問題 15

角度 θ だけ傾斜した斜面上の流れを、式 (*2) に従う平行流 $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ として求めよ。ただし、斜面の位置を $z = 0$ 、自由表面の位置を $z = H$ とする。

練習問題 16

位置 $x = \pm L/2$ に、静止した垂直な壁があり、そのあいだを粘性流体が満たして、重力にしたがって $+y$ 方向に流れている (速度を $\mathbf{u} = (0, v, 0)$ とする)。 $y = y_{\min}$ での圧力と $y = y_{\max}$ での圧力は、どちらも大気圧 p_{atm} に等しく、また流れは定常であるものとして、 v を x の関数として求め、図示せよ。

練習問題 17

$y = 0$ および $y = H$ に静止した平面壁があり、そのあいだを粘性流体が占めていて、圧力勾配によって駆動されている。上流側 $x = x_{\min}$ での圧力を p_H とし、下流側 $x = x_{\max}$ での圧力を $p_L (< p_H)$ とし、このときの速度場を求めて図示せよ。ただし重力の影響はなく、また流れは定常であるものとする。

練習問題 18

$z = 0$ に静止した壁があり、また $z = H$ には別の壁があって x 方向に速度 U で動いている。これら 2 つの壁にはさまれた領域を、粘性流体が満たしている。点 (x_{\min}, H) と (x_{\max}, H) での圧力は、どちらも大気圧 p_{atm} に等しい。流れは定常であって、速度場は常に x 軸に平行であり、また y 方向の非一様性および重力の効果は無視できるものとして、このときの速度場を求めて図示せよ。

おまけ

もちろん、授業中に何度か説明したとおり、一方向の流れという制約条件を課するのは人間の勝手だが、それが実際に安定な流れとして実現するかどうかは、Reynolds 数などの条件による。非常におおまかなことを言うと、たいていの場合、Reynolds 数が大きくなるにつれて流れは不安定となり、(途中経過がどうなるかは場合によっていろいろだが) 最終的には乱流に移行する。教科書の p.161 あたりを確認しておいてほしい。

Hagen–Poiseuille 流れ

平行流の中でも実用的に重要なのが、Hagen–Poiseuille 流れすなわち円管をとる平行流である。境界が円形なので、デカルト座標で考えるよりも、円柱座標に変換して考えるほうがよい。

管の中心軸にそって z 軸をとり、円柱座標を式 (*15) のように定める。このとき、ナブラ演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*21')$$

となる。

速度が z 軸に平行であるという制約条件は、

$$\mathbf{u} = u \mathbf{e}_z \quad (*33)$$

とあらわされる。すると、式 (*21) と式 (*33) より

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_z u \quad (*34)$$

となるので[‡]、連続の式から

$$\partial_z u = 0 \quad (*35)$$

となる (すなわち u は z によらない)。

さらに、流れは定常であり (t によらない) かつ軸対称である (θ によらない) としよう。このとき、 u は r のみの関数となる:

$$u = u(r). \quad (*36)$$

Navier–Stokes 方程式 (*1) に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{[式 (*1) の左辺]} &= \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &= \rho u \partial_z u \mathbf{e}_z = \cdots = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r (u \mathbf{e}_z) = -(\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= -\left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times \left(-(\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) + 0 \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r \left((\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \partial_\theta \left((\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) \\ &= \mathbf{e}_r \times \left(\partial_r^2 u \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \left(-(\partial_r u) \mathbf{e}_r \right) \\ &= \left(\partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \mathbf{e}_z \quad (*37) \end{aligned}$$

[‡] これはデカルト座標で計算しても同じ結果になる。

したがって (外力はないものとし、また圧力 p も軸対称であるとする)

$$\begin{aligned} \text{[式 (*1) の右辺]} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ &= -(\mathbf{e}_r \partial_r p + \mathbf{e}_z \partial_z p) + \mu \left(\partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となるので、係数比較により

$$r \text{ 方向: } 0 = -\partial_r p \quad (*38)$$

$$z \text{ 方向: } 0 = -\partial_z p + \mu \left(\partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \quad (*39)$$

という方程式が得られる。なお、 $u = u(r)$ であるから、式 (*39) の ∂_r は d/dr に読み替えられる。

練習問題 19

Navier–Stokes 方程式と式 (*33) から式 (*38)(*39) を導く過程を確認せよ。

おまけ

式 (*37) で求めた $\Delta \mathbf{u}$ は、2次元極座標でのスカラー場に対する Laplacian と同じ形をしている。これは式 (*33) の \mathbf{e}_z が定数ベクトルであって微分に関係しないためである。

式 (*37) はよく出てくる形なので、このまま覚えてしまっても損はない。ただし、速度場が式 (*33) のように書けるという前提条件があるのを忘れないこと。

式 (*38) より p は r に依存しない。式 (*39) は

$$\mu \left(\partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) = \partial_z p \quad (*39')$$

と書き直して、左辺は z によらず、右辺は r によらないから、式 (*39') の両辺とも定数でなければならず、したがって p は z の (たかだか) 1 次関数であることが分かる。

円管の長さを L とし、入口での圧力を p_H 、出口での圧力を p_L とすると、圧力勾配が

$$\partial_z p = -\frac{p_H - p_L}{L}$$

と定まり、式 (*39) に代入すると

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + r^{-1} \frac{du}{dr} = -\frac{p_H - p_L}{\mu L} \quad (*40)$$

という 2 階の ODE になる。これを解けば速度 u が r の関数として求められるはずである。管の半径を a と

すると、境界条件は

$$u|_{r=a} = 0 \quad (*41)$$

となる。

練習問題 20

式 (*40) の一般解が

$$u = A \log r + B - \frac{p_H - p_L}{4\mu L} r^2 \quad (*42)$$

となることを示せ。次に境界条件 (*41) を課し、また領域内部で u が発散することはないという条件を課すことにより、係数 A, B を決定し、 u を求めて図示せよ (教科書の図 46.1 のようになるはず)。

円管をとる流量を

$$Q = \int_{\text{円管断面}} u \, dS = \int_0^a u \cdot 2\pi r \, dr$$

とする。流れが平行流と見なせる場合、式 (*40) の解を用いて Q を計算することができて、結果は

$$Q = \frac{p_H - p_L}{L} \times \frac{\pi a^4}{8\mu} \quad (46.8)$$

となる (Hagen–Poiseuille の法則)。式 (46.8) を応用し、毛細管を用いた実験により流体の粘性を測定することができる[§]。

練習問題 21

式 (46.8) を導出せよ。また、左辺と右辺の次元が合っていることを確認せよ。

同心円状の流れ

一方向流れの次に簡単な流れとして、円柱座標 (*15) において速度がつねに e_θ 方向であるような流れを考える。このとき、すべての流体要素は同心円を描いて運動することになる。

このような流れを調べるため、速度および圧力を

$$\mathbf{u} = v e_\theta, \quad v = v(r, t); \quad p = p(r, t) \quad (*43)$$

[§] 鳥取大学の物理学実験の教科書を見よ。

と置いて、連続の式および Navier–Stokes 方程式に代入してみよう。まず

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \cdot (v e_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \partial_r (v e_\theta) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (v e_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot (\partial_r v) \mathbf{e}_\theta + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot (-v e_r) = 0 \end{aligned} \quad (*44)$$

となるから、式 (*43) の速度場は、これ以上の条件を課さなくても、既に連続の式を満たしていることが分かる。他方、式 (*14) を用いて $\Delta \mathbf{u}$ を計算すると

$$\Delta \mathbf{u} = \left(\partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (*45)$$

となることから[¶]、

[Navier–Stokes 方程式の右辺]

$$\begin{aligned} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ &= -\mathbf{e}_r \partial_r p + \mu \left(\partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

である。さらに $\mathbf{u} \cdot \nabla = (v/r) \partial_\theta$ より

[Navier–Stokes 方程式の左辺]

$$\begin{aligned} &= \rho (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &= \rho \partial_t (v e_\theta) + \frac{\rho v}{r} \partial_\theta (v e_\theta) \\ &= \rho (\partial_t v) \mathbf{e}_\theta - \frac{\rho v^2}{r} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

であるので、係数比較により

$$r \text{ 方向: } -\frac{\rho v^2}{r} = -\partial_r p \quad (*46)$$

$$\theta \text{ 方向: } \rho \partial_t v = \mu \left(\partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (*47)$$

を得る。定常な場合には、どちらの方程式も常微分方程式となり、 ∂_r は d/dr に読み替えられる。

練習問題 22

式 (*45) を導出せよ。

練習問題 23

Navier–Stokes 方程式から式 (*46)(*47) を導出する過程を、プリント等を見ずに自力で再現せよ。

[¶] 式 (*37) と違って、式 (*45) はスカラー場に対する Laplacian とは一致せず、 $-v/r^2$ という余計な項がついている。これは、式 (*43) の e_θ が θ によって変化するためである。

渦系の拡散

以下では、壁のない無限領域での渦流れを考える。
同心円状の流線をもつポテンシャル流れとして

$$\mathbf{u} = v\mathbf{e}_\theta, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (19.9)$$

というものが^{||}、渦系と呼ばれている(教科書の §9 および §27 を見よ)。流れ (19.9) において、渦度は z 軸上 ($r = 0$ のところ) にデルタ関数的に集中しており、それ以外の領域では渦度はゼロである。

渦系 (19.9) は Euler 方程式の定常解であるが、Navier-Stokes 方程式の場合はそうはならない^{**}。粘性により、渦系は時間とともに拡散し、渦度をもつ領域は有限の大きさの領域に広がる。その広がりの代表長さを δ とすると、

$$\delta \propto \sqrt{\nu t} \quad (46.13)$$

である。別の言い方をすると、渦度の広がりの大きさが 0 から δ まで達するのに要する時間は

$$t \sim \delta^2/\nu \quad (*48)$$

で与えられる^{††}。

練習問題 24

渦度の拡散する広がりの大きさは、動粘性係数 ν と経過時間 t を用いて

$$\delta \sim \nu^a t^b$$

のように書けるはずである。次元の合う組み合わせは、式 (46.13) すなわち $a = b = 1/2$ に限られることを示せ。

初期条件を理想的な渦系 (19.9) とした場合について Navier-Stokes 方程式の解を具体的に求めるには、

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(s), \quad s = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \quad (*49)$$

と置いて式 (*47) に代入する。ここで s は r, t, ν を組み合わせて無次元になるように作った変数である。

^{||} 教科書に近い書き方をするのであれば $v = -\kappa/r$ だが、ここでは $\kappa = -\Gamma/(2\pi)$ として Γ で書き直した。

^{**} 円筒壁を設けて強制的に流れを駆動すれば話は別だが。

^{††} 7/17 の小テストの最後の問題との共通点に注目しよう。

計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\partial s}{\partial t} \frac{df}{ds} = -\frac{\Gamma}{4\pi\sqrt{\nu t^3}} \frac{df}{ds} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \left(\frac{d}{dr} \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) f + \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\partial s}{\partial r} \frac{df}{ds} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} f + \frac{\Gamma}{2\pi r\sqrt{\nu t}} \frac{df}{ds} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{\pi r^3} f - \frac{\Gamma}{\pi r^2\sqrt{\nu t}} \frac{df}{ds} + \frac{\Gamma}{2\pi r\nu t} \frac{d^2 f}{ds^2} \end{aligned}$$

となり、式 (*47) に代入して整理すると

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{s} \right) \frac{df}{ds} = 0 \quad (*50)$$

という 2 階の ODE になる。式 (*50) は、 $df/ds = g$ と置くと変数分離で解ける形になる。境界条件を

$$f|_{s=0} = f|_{t=\infty} = 0, \quad f|_{s=\infty} = f|_{t=0} = 1$$

として式 (*50) を解くと

$$f = 1 - e^{-s^2/4}$$

すなわち

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (*51)$$

という解が得られる。この解 (*51) は、それぞれの時刻における速度場が互いに相似な形になっているため、相似解と呼ばれる。式 (*49) の変数 s のようなものを用いて PDE を ODE に帰着させ相似解を求める方法を相似解の方法または相似変数の方法という。

式 (*51) による速度分布の時間変化の様子をグラフにすると、速度 v は、ほぼ $r \simeq 2\sqrt{\nu t}$ (より正確には $r/\sqrt{\nu t} = 2.2418$) で極大をもち、遠方では式 (19.9) に漸近する曲線となる。内側の領域 ($r < 2\sqrt{\nu t}$) では、流体は有限の渦度をもって自転している。この領域の広がりはおよそ $2\sqrt{\nu t}$ であって、こうして式 (46.13) が裏付けられる。

練習問題 25

(x, z) 平面上 (すなわち $y = 0$ の位置) に無限に広い平板があり、粘性流体が $0 < y < +\infty$ の領域を満たしている。最初は平板も流体も静止していたが、時刻 $t = 0$ において、平板が $+x$ 方向に一定速度 U で動き出した。このとき流体中に生じる流れは

$$u = U (1 - \operatorname{erf}\eta), \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (46.11)$$

のようにあらわされることを示せ。

方針: 相似変数の方法でもよいし、正弦 Fourier 変換を用いてもよい。どちらでも同じ結果が得られる。

式 (46.11) の流れは、渦度場であらわすと

$$\omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \quad (*52)$$

と書ける (粘着条件のもとで式 (*52) を y で積分すると速度場の式 (46.11) が得られる)。式 (*52) から、有限の渦度をもつ領域は平板の近傍に限定されること、また、この場合にも、渦度をもつ領域の広がりについて関係式 (46.13) が成り立っていることが分かる^{††}。

Burgers 渦

式 (*51) は、粘性によって渦がしだいに拡散していく様子をあらわしている。しかし、風呂桶や竜巻などに見られるように、 r 方向の内向き流れと z 方向の伸長流れが存在すれば、渦の広がりを抑えて強い渦を作ることができる。このような状況を解析するために、式 (*43) の速度場に上記のような収束・伸長流れを重ねあわせて

$$\mathbf{u} = v\mathbf{e}_\theta + \alpha z\mathbf{e}_z - \beta r\mathbf{e}_r \quad (*53)$$

と置いて Navier–Stokes 方程式に代入する。ただし α および β は定数であり、また $v = v(r)$, $p = p(r, z)$ とする (定常解を想定)。

まず $\operatorname{div} \mathbf{u} = -2\beta + \alpha$ だから、連続の式より

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha$$

^{††} 比例係数は、判定基準によって 2 だったり 4 だったりするが (教科書の式 (46.13) では係数は 4 になっている) いずれにしても、 δ が $\sqrt{\nu t}$ に比例することに変わりはない。

でなければならない。Navier–Stokes 方程式の右辺については、圧力項に z 微分の項が現れるだけで、あとは拡散渦と同じである。特に $\Delta \mathbf{u}$ は式 (*45) と一致する (ただし ∂_r は d/dr に読み替える)。他方、左辺については

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \left(\frac{\alpha^2}{4}r - \frac{v^2}{r}\right)\mathbf{e}_r - \frac{\alpha}{2}\left(r\frac{dv}{dr} + v\right)\mathbf{e}_\theta + \alpha^2 z\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となり、係数比較により

$$r \text{ 方向: } \rho\left(\frac{\alpha^2}{4}r - \frac{v^2}{r}\right) = -\partial_r p \quad (*54)$$

$$z \text{ 方向: } \rho\alpha^2 z = -\partial_z p \quad (*55)$$

$$\begin{aligned} \theta \text{ 方向: } -\frac{\alpha\rho}{2}\left(r\frac{dv}{dr} + v\right) &= \mu\left(\frac{d^2v}{dr^2} + r^{-1}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right) \quad (*56) \end{aligned}$$

を得る。式 (*56) は、やはり式 (19.9) に基づく“定数変化法”で

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(r) \quad (*57)$$

と置いて解くことができる。式 (*49) とは違って、ここでの f の引数は s ではなく r であることに注意しよう。解は

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{4\nu}r^2\right)\right] \quad (*58)$$

となり、式 (*51) と同じような速度分布になるが、式 (*51) と違って時間とともに拡散したりせず、渦領域は一定の大きさを保つ。式 (*53)(*58) であらわされる渦を Burgers 渦という。

練習問題 26

Navier–Stokes 方程式と式 (*53) から式 (*56) を導出し、これを解いて Burgers 渦の式 (*58) を求める過程を、プリント等を見ずに自力で再現せよ。

境界層の厚さ

教科書の図 46.3 のように、平らな板が流れに平行に置かれているとする。下流に進むにつれて境界層は少しずつ厚くなる。境界層の厚さが増加する主な機構

は粘性による拡散であるとするれば、境界層の厚さについて、式 (46.13) と同様の関係式が成り立つはずである。ただし、経過時間 t の代わりに、流体が板の影響を受けはじめてから位置 x に来るまでにかかった時間、すなわち x/U をとる。これにより、位置 x での境界層の厚さは

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (*59)$$

のように見積もることができる (右辺には 2 とか 4 とかいう係数がつくはずだが、簡単化のため、係数は無視して話を進める)。

板の全長を L としよう。式 (*59) によると、境界層の厚さの最大値は

$$\delta_{\max} \simeq \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}}$$

のように見積もられる。ここで、Reynolds 数が

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (*60)$$

であることを思い出すと、境界層の厚さは

$$\delta_{\max} \simeq \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (*59')$$

と書ける。式 (*59') から、Reynolds 数が大きい流れでは、 L に比べると相対的に境界層は薄いことが確認できる。

練習問題 27

風速 $U = 1.5 \text{ m/s}$ の気流のなかに、長さ $L = 10 \text{ cm}$ の板が流れに平行に置かれているとする。この場合の Reynolds 数を求めよ。さらに、式 (*59') が適用できるものとして、境界層の厚さを概算せよ。

おまけ

式 (*59) は層流境界層に対する式である。Reynolds 数があまりにも大きくなると (たとえば 10 万とか 100 万とか)、境界層が乱流化し、式 (*59) は適用できなくなる。また、物体の形状やその他の条件によっては、そもそも流体が物体にそって流れることが困難となり、境界層が途中で剥離する可能性がある (教科書の図 48.2 を見よ)。こういう場合も、当然、式 (*59) の適用範囲外となる。