

期末試験 (8/4) にそなえて講義ノートやレポート課題を見直す際に注意してほしいポイントや講義で説明しれなかった事項をまとめた。そのほか、前回の補足資料と同様、試験にはおそらく出ないけれどもあとで役に立つのではないと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておいてほしい。  
この資料は、後日、流体力学 II のホームページ (<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/fluid/>) からダウンロードできるようにする予定である。

## まずは基礎知識を確認

何も見ないで以下のものを書いてみよう。ただし、簡単化のため、密度一定の非圧縮流体に限定する。

- 連続の式  
[書けなかった場合 教科書の式 (3.4)]
- Navier-Stokes 方程式 (太字ベクトル表記)  
[書けなかった場合 補足資料 (6/28)]
- Navier-Stokes 方程式 (3 次元で成分表示)  
[書けなかった場合 講義ノート]
- Reynolds 数  
[書けなかった場合 教科書の式 (40.6), (45.8)]
- 水の動粘性係数 (単位も含めて)  
[書けなかった場合 教科書 p.186]

Navier-Stokes 方程式は、単に丸暗記するよりも、各項の意味を確認しながらおぼえるほうが間違いが少ない。流体力学 I の講義ノート (Euler 方程式の各項の意味) や、前回の補足資料 (Navier-Stokes 方程式の導出) などを見て、それぞれの項が何をあらわしているのかを確認しておこう。

### 練習問題 1

流体の運動量に関する balance law を考えると

$$\partial_t(\rho v_i) + \sum_j \partial_j(\rho v_i v_j) = F_i^{(ex)} - \partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{ij}$$

という式が得られる。各項の意味を説明せよ。さらに、 $\tau_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$  を代入し整理すると

$$\rho(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F}^{(ex)} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (*1)$$

のようにまとめられることを示せ。

### 練習問題 2

$\nabla \cdot \mathbf{v}$  と  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  の違いについて説明せよ。また、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  と  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  の違いについて説明せよ。

### 練習問題 3

外力として重力のみを受ける非圧縮粘性流体の場合、Navier-Stokes 方程式および連続の式は

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (*2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (*3)$$

のように書ける。座標系を 3 次元デカルト座標系とし、 $\mathbf{g} = (g \sin \theta, 0, -g \cos \theta)$  として、式 (\*2)(\*3) を成分表示で書き下せ。

### 練習問題 4

身の回りで生じる適当な流れを例にとり、流れの代表長さ  $L$  および流速  $U$  をおおざっぱに見積もって、Reynolds 数を概算せよ。

## ベクトル解析

高校で習うような微分や積分の計算は、意味を考えなくても公式として覚えれば何とかなるようなものだったかもしれない。しかし、ベクトルが関与するような複雑な微分になってくると、そのような方針はもはや通用しない。最も基本的な微分の定義式である

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (*4)$$

に戻り、その“分母を払って”得られる

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad (*5)$$

という式\*を出発点として、ベクトル解析の基礎事項について確認しておこう。

**勾配とナブラ演算子**

式 (\*5) を拡張して、変数  $x$  を位置ベクトル  $\mathbf{r}$  で置き換えた式を考える。位置の差である  $\Delta x$  は  $\Delta \mathbf{r}$  におきかわり、内積のドットを用いて

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = (\text{grad } f) \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (*6)$$

と書ける (もちろん  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$ )。右辺は  $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad } f$  と書いても良い。または、同じことだが、近接した 2 点 A および B を考え、 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{AB}$  とすると、

$$f(B) - f(A) = \overrightarrow{AB} \cdot \text{grad } f \quad (*6')$$

とも書ける。こうして定められる  $\text{grad } f$  を「 $f$  の勾配 (gradient)」という。式 (\*6) を、偏微分の基本な関係式である

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

と見比べることにより、

$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix} \quad (*7)$$

を得る (もちろん  $\partial_x$  は  $\partial/\partial x$  の略記)

勾配の式 (\*7) は、ナブラ演算子

$$\nabla = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*8)$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f, \quad f(B) - f(A) = \overrightarrow{AB} \cdot \nabla f \quad (*9)$$

のように書ける。なお、演算子を含む式では順番に注意しよう (うかつに並べかえてはいけない)。たとえば  $\mathbf{e}_x \partial_x$  の  $\partial_x$  は後ろに書くべきである。

**練習問題 5**

$\nabla(pq)$  と  $p\nabla q$  の差を求めよ。(ヒント:  $\nabla$  のなかの  $\partial_x$  や  $\partial_y$  が  $p$  にも作用するかどうかに注意)

\* ここでは、分かりやすくするために、lim に関する数学的厳密性を無視して話を進める。そんないいかげんなことでは困る、という人は、たとえば「ゼロから学ぶ物理数学」などの本を見て、ここでの説明との対応を考えること。

**ベクトル場の微分**

あるベクトル場  $\mathbf{v}$  が与えられているものとしよう。ナブラ演算子  $\nabla$  を用いると、ベクトル場  $\mathbf{v}$  の発散 (divergence) および回転 (rotation) は

$$\text{発散: } \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (*10)$$

$$\text{回転: } \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (*11)$$

のように書ける。

スカラー場  $f$  の勾配は式 (\*9) で与えられ、その結果はベクトル場になる。ベクトル場  $\mathbf{v}$  に対しても勾配  $\text{grad } \mathbf{v}$  を求めることは可能だが、その結果は、ベクトルでもスカラーでもなく、2 階テンソルになる。

Laplace 演算子 (Laplacian) は  $\nabla^2$  または  $\Delta$  によってあらわされ、スカラー場に対しては

$$\Delta f = \nabla^2 f = \text{div grad } f \quad (*12)$$

で与えられる。デカルト座標でのナブラ演算子の式 (\*8) を用いて計算すると

$$\Delta f = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f \quad (*13)$$

となることが分かる。

ベクトル場に対しても、式 (\*12) をそのまま用いることは一応可能だが、その場合、

$$\Delta \mathbf{v} = \text{div}(\text{grad } \mathbf{v}) \quad (*14)$$

のように、計算の途中で 2 階テンソル  $\text{grad } \mathbf{v}$  を経由することになる。これはデカルト座標以外の座標系では面倒なことになるので、それを避けるためには、ベクトル場の Laplacian は

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= -\text{rot rot } \mathbf{v} + \text{grad div } \mathbf{v} \\ &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (*15)$$

のように計算するほうがよい。特に、もし  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  であることがあらかじめ分かっているなら、計算するのは第 1 項だけでよいことになる。

**円柱座標でのベクトル解析**

円柱座標の書き方は場合によって微妙に異なるが<sup>†</sup>、ここでは位置ベクトルが

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix} \quad (*16)$$

<sup>†</sup> たとえば円柱の軸を  $x$  方向とするか  $z$  方向とするか、など。

のようにあらわされるものとして話を進める。

近接した 2 点 A および B を考え、両者の相対位置ベクトル  $\Delta \mathbf{r}$  をあらわす式を求めよう。点 A の位置ベクトル  $\vec{OA} = \mathbf{r}$  は式 (\*16) そのものであらわされるとし、点 B の位置ベクトルを

$$\vec{OB} = \begin{bmatrix} (r + \Delta r) \cos(\theta + \Delta\theta) \\ (r + \Delta r) \sin(\theta + \Delta\theta) \\ z + \Delta z \end{bmatrix} = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$$

とする<sup>‡</sup>。相対位置ベクトル  $\Delta \mathbf{r}$  は、偏微分を用いて

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \Delta z \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r + \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta z \quad (*17) \end{aligned}$$

と求められ、さらに、互いに直交する単位ベクトル

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*18)$$

を導入することにより

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_r \Delta r + r \mathbf{e}_\theta \Delta \theta + \mathbf{e}_z \Delta z \quad (*17')$$

のようにあらわされる。

**練習問題 6**

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と、式 (\*18) で導入された 3 本のベクトルの位置関係を図示せよ。ただし、 $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  の始点は  $\mathbf{r}$  の終点に一致させて図示する。

**練習問題 7**

$\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  が互いに直交していることを内積の計算によって確認せよ。また、外積を計算し、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r &= -\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

となることを確認せよ。

<sup>‡</sup> ここでは、 $r, \theta, z$  の 3 つを同時に変化させ、式 (\*17) で偏微分の関係式を用いて 3 つを一気に片付ける方針をとっている。偏微分に慣れていない人は、講義ノートにあるように、 $r$  のみを変化させた点を  $B_1$ 、 $\theta$  のみを変化させた点を  $B_2$ 、... として 1 つずつ順番に考えればよい。

デカルト座標での  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  が  $\mathbf{r}$  によらず一定の方向を指すのとは異なり、 $\mathbf{e}_r$  や  $\mathbf{e}_\theta$  は、 $\mathbf{r}$  の動きとともに方向が変化する。特に、次の式が成り立つ：

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r. \quad (*19)$$

**練習問題 8**

式 (\*19) が成立することを確認せよ。

続いて、任意のスカラー場  $f$  に対する  $\text{grad } f$  を、定義式 (\*6') から定める。式 (\*6') に式 (\*17') を代入したものを、偏微分の関係式

$$\begin{aligned} f(B) - f(A) &= f(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, z + \Delta z) - f(r, \theta, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial f}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \end{aligned}$$

と見比べることにより、

$$\mathbf{e}_r \cdot \text{grad } f = \partial_r f \quad (*20a)$$

$$r \mathbf{e}_\theta \cdot \text{grad } f = \partial_\theta f \quad (*20b)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \text{grad } f = \partial_z f \quad (*20c)$$

を得る<sup>§</sup>。方程式 (\*20) は、ベクトル  $\text{grad } f$  を定める連立一次方程式になっていて、その解は

$$\text{grad } f = \mathbf{e}_r \partial_r f + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta f + \mathbf{e}_z \partial_z f. \quad (*21)$$

したがって、円柱座標でのナブラ演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*22)$$

となるのが分かる。

**練習問題 9**

式 (\*21) を方程式 (\*20) に代入すると、たしかに等号が成立することを確認せよ。

<sup>§</sup> 偏微分の関係式に慣れていない人は、3 つの変数を 1 つずつ順番に考え (たとえば最初は  $r$  だけを変化させる) 式 (\*4) のような形で微分に持ち込めばよい。

おまけ

式 (\*21) を求める別の方法として、連鎖則による関係式

$$\nabla f = (\nabla r) \frac{\partial f}{\partial r} + (\nabla \theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} + (\nabla z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

を直接用いるという手もある。式 (\*16) を逆に解くと

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

であり、これにより、たとえば  $\nabla r$  が

$$\nabla r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

のように計算できて、これから式 (\*21) が得られる。

さて、ベクトル場  $\mathbf{v}$  が

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (*23)$$

のように与えられているものとしよう。各変数の位置依存性については最も一般性の高い場合を考え、

$$v_r = v_r(r, \theta, z)$$

$$v_\theta = v_\theta(r, \theta, z)$$

$$v_z = v_z(r, \theta, z)$$

とする。

円柱座標におけるナブラの式 (\*22) を用いて  $\text{div } \mathbf{v}$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \partial_r (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \mathbf{e}_z \cdot \partial_z (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \quad (*24) \end{aligned}$$

となるが、このなかで  $\partial_\theta$  の項について特に注意が必要である。ベクトル  $\mathbf{e}_r$  および  $\mathbf{e}_\theta$  は  $\theta$  によって変化することを考慮し、式 (\*19) を用いると

$$\begin{aligned} \partial_\theta (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) &= (\partial_\theta v_r) \mathbf{e}_r + v_r \partial_\theta \mathbf{e}_r \\ &\quad + (\partial_\theta v_\theta) \mathbf{e}_\theta + v_\theta \partial_\theta \mathbf{e}_\theta + (\partial_\theta v_z) \mathbf{e}_z \\ &= (\partial_\theta v_r - v_\theta) \mathbf{e}_r + (\partial_\theta v_\theta + v_r) \mathbf{e}_\theta + (\partial_\theta v_z) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となる。さらに  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  が互いに直交する単位ベクトルであることを用いると

$$\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) = \frac{\partial_\theta v_\theta + v_r}{r} \quad (*25)$$

のように計算できる。他の項についても同様に計算し、結果を式 (\*24) に代入して整理すると

$$\text{div } \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z \quad (*26)$$

となる<sup>¶</sup>。重要なことは、 $\mathbf{e}_r$  や  $\mathbf{e}_\theta$  が  $\theta$  によって変化するのために、式 (\*26) に  $v_r/r$  という項が出現することである。

式 (\*24) と同じ方法で  $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$  が計算できる。一般的な場合の計算は項が多くて大変だが、 $\mathbf{v}$  の形に制約条件をつけて、たとえば

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_z, \quad u = u(r) \quad (*27)$$

とすると、 $\text{rot } \mathbf{v}$  は

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r (u \mathbf{e}_z) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \partial_\theta (u \mathbf{e}_z) \\ &\quad + \mathbf{e}_z \times \partial_z (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times (\partial_r u) \mathbf{e}_z + \mathbf{0} + \mathbf{0} = -\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (*28) \end{aligned}$$

のように求められる。

練習問題 10

速度ベクトルが、円柱座標により

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\theta, \quad v = v(r)$$

のように与えられている場合について、

$$\text{rot } \mathbf{v} = (\partial_r v + v/r) \mathbf{e}_z$$

であることを示せ。

練習問題 11

速度場を  $\mathbf{v} = u(r, z) \mathbf{e}_r + v(r, z) \mathbf{e}_\theta + w(r, z) \mathbf{e}_z$  とし、 $\text{div } \mathbf{v}$  および  $\text{rot } \mathbf{v}$  を計算せよ。

Laplacian は、スカラー場に対しては式 (\*12) によって、また、ベクトル場に対しては式 (\*15) によって計算できる。

<sup>¶</sup> ただしこれは最も一般性が高い場合の式であり、何らかの制約条件 (たとえば  $\partial_\theta v_\theta = 0$  とか) がつけばもっと簡単な式になる場合もある。

**円柱座標での連続の式の直接的導出**

連続の式は、もちろん式 (\*3) すなわち  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  に式 (\*26) を代入して

$$\partial_r v_r + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z = 0 \quad (*29)$$

のように書き下せる。他方、連続の式はもともと質量に対する balance law から出てきたのだから、円柱座標で balance law を考えることにより式 (\*29) を直接導出することもできる。

円柱座標にそって空間を微小領域に分割し、そのひとつひとつを検査体積として、質量についての balance law を考えよう。なお、簡単化のため、最初から  $\rho = \text{const.}$  とする。微小要素の 6 つの面に対し

- 内 = 位置  $r$  にある  $-e_r$  方向の面
- 外 = 位置  $r + \Delta r$  にある  $+e_r$  方向の面
- 右 = 位置  $\theta$  にある  $-e_\theta$  方向の面
- 左 = 位置  $\theta + \Delta\theta$  にある  $+e_\theta$  方向の面
- 下 = 位置  $z$  にある  $-e_z$  方向の面
- 上 = 位置  $z + \Delta z$  にある  $+e_z$  方向の面

のように名前をつける。デカルト座標系の場合とは違って、向かい合った面の面積は等しいとは限らない。実際、(内) よりも (外) のほうが面積が大きく、これらの面積を  $\Delta S[(\text{内})]$  および  $\Delta S[(\text{外})]$  とすると

$$\begin{aligned} \Delta S[(\text{内})] &= r \Delta\theta \Delta z \\ \Delta S[(\text{外})] &= (r + \Delta r) \Delta\theta \Delta z \end{aligned}$$

である。それぞれの面から流入する流体の体積は

$$\begin{aligned} + (v_r|_{\text{内}} \Delta t) \Delta S[(\text{内})] &= + r v_r|_r \Delta\theta \Delta z \Delta t \\ - (v_r|_{\text{外}} \Delta t) \Delta S[(\text{外})] &= - (r + \Delta r) v_r|_{r+\Delta r} \Delta\theta \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

のように計算され、したがって

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} (\text{内}) \text{ と } (\text{外}) \\ \text{の質量流入} \\ \text{量の合計} \end{array} \right] &= \rho (r v_r|_r - (r + \Delta r) v_r|_{r+\Delta r}) \Delta\theta \Delta z \Delta t \\ &= -\rho \frac{(r + \Delta r) v_r|_{r+\Delta r} - r v_r|_r}{\Delta r} \frac{\Delta V \Delta t}{r + \frac{1}{2} \Delta r} \\ &\rightarrow -\rho \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} \frac{\Delta V \Delta t}{r} \quad (*30) \end{aligned}$$

となる。なお、検査面で囲まれる領域の体積が

$$\Delta V = \left( r + \frac{1}{2} \Delta r \right) \Delta r \Delta\theta \Delta z$$

であることを用いた。

他の 2 組の面についても同様のことをおこない、検査体積内の質量の収支について

$$\begin{aligned} (\rho \Delta V)|_{t+\Delta t} &= (\rho \Delta V)|_t \\ &+ \rho \left[ \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z \right] \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

という式を得る。ここで、密度は一定だとしているから  $(\rho \Delta V)|_{t+\Delta t} = (\rho \Delta V)|_t$  であり、したがって右辺のカッコのなかの式はゼロでなければならない。積の微分を展開し、式 (\*29) と同じものを得る。

**練習問題 12**

円柱座標で表した連続の式 (\*29) の導出過程を、講義ノートもプリントも見ないで自力で再現せよ。

**Navier-Stokes 方程式の解**

Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式は、速度  $\mathbf{v}$  について 2 次の項を含む、非線形の偏微分方程式である。そのため、一般解を求めることはほとんど不可能だと考えられる。しかし、何らかの制約条件の枠内であれば\*、解を求めることは可能である。

**平行流**

もっとも基本的な場合として、

速度ベクトルが常にある方向に平行である

という制約条件を課した場合を考える。このような制約条件を満たす流れのことを平行流とか一方向流れとかいう (教科書 §46 を見よ)。

\* Euler 方程式の場合は「ポテンシャル流れ」(非回転流れ) という制約条件を課すことで、さまざまな解を求めることができた。残念ながら、Navier-Stokes 方程式で同じことをしようとする、粘着条件と矛盾してしまい、意味のある解が得られない。したがって別の手を考える必要がある。

## 練習問題 13

Navier–Stokes 方程式 (\*1) で外力がゼロの場合を考える。速度がつねに  $z$  方向に平行であるという条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか？ ただし流れは必ずしも定常ではないものとする。

方針: まずは速度ベクトルを  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  として、式 (\*1) および連続の式を具体的に成分表示で書き下す。次に、 $u$  や  $v$  はゼロなので、それらを含む項をすべて消す。すると連続の式から  $\partial_z w = 0$  となるので、これを用いてさらに項を消す。最終的には、圧力の式と速度の式に分離できる形になる。

## 練習問題 14

重力項を含む Navier–Stokes 方程式 (\*2) において、流れは定常であるものとし、さらに速度が常に  $x$  軸に平行であるという制約条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか？

平行流において、Navier–Stokes 方程式は大幅に簡単化される。非定常の場合の方程式は、実質的に熱伝導方程式（あるいは拡散方程式）と同じものになり、したがって偏微分方程式の教科書に載っている解法（固有関数展開など）で解ける。定常の場合には方程式はさらに簡単になり、最も単純な場合には線形 2 階 ODE に帰着する。

さて微分方程式を解いて速度を求めるには、境界条件を具体的に知る必要がある。

- 壁がある場合には、粘着条件により、壁に対する流体の相対速度はゼロになる。もう少し詳しく言うと、壁が静止している場合は壁際での流体の速度はゼロとなり、壁が速度  $U$  で動いている場合は流体もそれと同じ速度で動く。
- 自由表面においては、流体の法線応力が外界の圧力（大気圧）とつりあい、接線応力は（つりあう相手がいないので）ゼロとなる。

たとえば、速度を  $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$  とし、また、考えている境界面は  $y$  軸に直交する（つまり  $y = \text{const.}$  の形で書ける）ものとする。このとき、速度  $u$  に対する境

界条件は、次のようにまとめられる<sup>†</sup>:

$$\text{静止した壁: } u|_{\text{境界}} = 0 \quad (*31)$$

$$\text{速度 } U \text{ で動く壁: } u|_{\text{境界}} = U \quad (*32)$$

$$\text{自由表面: } \partial_y u|_{\text{境界}} = 0 \quad (*33)$$

もちろん、たとえば速度場が  $\mathbf{v} = (0, 0, w)$  で、自由表面の位置が  $y = \text{const.}$  でなく  $x = \text{const.}$  だったら、境界条件は  $\partial_x w|_{\text{境界}} = 0$  のように読み替える。

速度場を図示するには、一般には矢印をたくさん描いたり、流線を示したりする必要がある。しかし、一方向流では、わざわざベクトル場全体を図示する必要はない。たとえば  $u = u(x)$  の場合は  $x$  に対する  $u$  の分布（速度プロファイル）を図示すれば足りる。

## 練習問題 15

角度  $\theta$  だけ傾斜した斜面上の流れを、式 (\*2) に従う平行流  $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$  として求め、速度プロファイルを図示せよ。ただし、斜面の位置を  $z = 0$ 、自由表面の位置を  $z = H$  とする。

## 練習問題 16

位置  $x = \pm L/2$  に、静止した垂直な壁があり、そのあいだを粘性流体が満たして、重力にしたがって  $+y$  方向に流れている（速度を  $\mathbf{v} = (0, v, 0)$  とする）。 $y = y_{\min}$  での圧力と  $y = y_{\max}$  での圧力は、どちらも大気圧  $p_{\text{atm}}$  に等しく、また流れは定常であるものとして、 $v$  を  $x$  の関数として求め、図示せよ。

## 練習問題 17

$y = 0$  および  $y = H$  に静止した平面壁があり、そのあいだを粘性流体が占めていて、圧力勾配によって駆動されている。上流側  $x = x_{\min}$  での圧力を  $p_H$  とし、下流側  $x = x_{\max}$  での圧力を  $p_L (< p_H)$  として、このときの速度場を求めて図示せよ。ただし重力の影響はなく、また流れは定常であるものとする。

<sup>†</sup> 平行流という限定条件がついていることに注意。この限定条件がない場合は、もう少し複雑なことを考えなければならない。特に、自由表面境界条件は、表面の法線ベクトルと粘性応力テンソルを用いて書く必要があるし、表面が曲がっているなら表面張力も考えることになる。

**練習問題 18**

$z = 0$  に静止した壁があり、また  $z = H$  には別の壁があって  $x$  方向に速度  $U$  で動いている。さらに、 $x = \pm L$  には静止した壁があり、これら 4 つの壁にはさまれた長方形領域に粘性流体が閉じ込められて循環している。この循環流は定常であり、 $y$  方向の非一様性や重力の効果は無視できるものとする。ここで  $L \gg H$  とすると、この細長い領域の両端付近を除けば、流れは一方向流れと見なすことができる。このときの速度プロファイルを求めて図示せよ。さらに、領域の両端の圧力差を求めよ。

**おまけ**

もちろん、授業中に何度か説明したとおり、一方向の流れという制約条件を課するのは人間の勝手だが、それが実際に安定な流れとして実現するかどうかは、Reynolds 数などの条件による。非常におおまかなことを言うと、たいいていの場合、Reynolds 数が大きくなるにつれて流れは不安定となり、(途中経過がどうなるかは場合によっていろいろだが)最終的には乱流に移行する。教科書の p.161 あたりを確認しておいてほしい。

なお、授業中に示した斜面流の実験や Taylor-Couette 流れの実験は、最初の制約条件に従う流れが不安定化したからといって直ちに乱流になるとは限らないということも示している。

**Hagen-Poiseuille 流れ**

平行流の中でも実用的に重要なのが、Hagen-Poiseuille 流れすなわち円管をとる平行流である。境界が円形なので、デカルト座標で考えるよりも、円柱座標に変換して考えるほうがよい。今年 (2010 粘度) の講義では直接扱っていないが、重要な流れであるし、習ったことを組み合わせればできる内容なので、ここに載せておく。

管の中心軸にそって  $z$  軸をとり、円柱座標を式 (\*16) のように定める。このとき、ナブラ演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (*22')$$

となる。

速度が  $z$  軸に平行であるという制約条件は、

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_z \quad (*34)$$

とあらわされる。すると、式 (\*22) と式 (\*34) より

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_z u \quad (*35)$$

となるので<sup>‡</sup>、連続の式から

$$\partial_z u = 0 \quad (*36)$$

となる (すなわち  $u$  は  $z$  によらない)。

さらに、流れは定常であり ( $t$  によらない) かつ軸対称である ( $\theta$  によらない) としよう。このとき、 $u$  は  $r$  のみの関数となる:

$$u = u(r). \quad (*37)$$

Navier-Stokes 方程式 (\*1) に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{[式 (*1) の左辺]} &= \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \rho u \partial_z u \mathbf{e}_z = \dots = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times (u \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r (u \mathbf{e}_z) = -(\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= -\text{rot rot } \mathbf{v} + \text{grad div } \mathbf{v} \\ &= -\left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \times \left( -(\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) + 0 \\ &= \mathbf{e}_r \times \partial_r \left( (\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \partial_\theta \left( (\partial_r u) \mathbf{e}_\theta \right) \\ &= \mathbf{e}_r \times \left( \partial_r^2 u \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \times \left( -(\partial_r u) \mathbf{e}_r \right) \\ &= \left( \partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \mathbf{e}_z \quad (*38) \end{aligned}$$

したがって (外力はないものとし、また圧力  $p$  も軸対称であるとする)

$$\begin{aligned} \text{[式 (*1) の右辺]} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ &= -(\mathbf{e}_r \partial_r p + \mathbf{e}_z \partial_z p) + \mu \left( \partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

となるので、係数比較により

$$r \text{ 方向: } 0 = -\partial_r p \quad (*39)$$

$$z \text{ 方向: } 0 = -\partial_z p + \mu \left( \partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u \right) \quad (*40)$$

<sup>‡</sup> これはデカルト座標で計算しても同じ結果になる。

という方程式が得られる。なお、 $u = u(r)$  であるから、式 (\*40) の  $\partial_r$  は  $d/dr$  に読み替えられる。

### 練習問題 19

Navier–Stokes 方程式と式 (\*34) から式 (\*39)(\*40) を導く過程を、プリントやノートなどを見ずに自力で再現せよ。

### おまけ

式 (\*38) で求めた  $\Delta \mathbf{v}$  は、2次元極座標でのスカラー場に対する Laplacian と同じ形をしている。これは式 (\*34) の  $\mathbf{e}_z$  が定数ベクトルであって微分に関係しないためである。

式 (\*38) はよく出てくる形なので、このまま覚えてしまっても損はない。ただし、速度場が式 (\*34) のように書けるという前提条件があるのを忘れないこと。

式 (\*39) より  $p$  は  $r$  に依存しない。式 (\*40) は

$$\mu (\partial_r^2 u + r^{-1} \partial_r u) = \partial_z p \quad (*40')$$

と書き直して、左辺は  $z$  によらず、右辺は  $r$  によらないから、式 (\*40') の両辺とも定数でなければならず、したがって  $p$  は  $z$  の (たかだか) 1 次関数であることが分かる。

円管の長さを  $L$  とし、入口での圧力を  $p_H$ 、出口での圧力を  $p_L$  とすると、圧力勾配が

$$\partial_z p = -\frac{p_H - p_L}{L}$$

と定まり、式 (\*40) に代入すると

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + r^{-1} \frac{du}{dr} = -\frac{p_H - p_L}{\mu L} \quad (*41)$$

という 2 階の ODE になる。これを解けば速度  $u$  が  $r$  の関数として求められるはずである。管の半径を  $a$  とすると、境界条件は

$$u|_{r=a} = 0 \quad (*42)$$

となる。

### 練習問題 20

式 (\*41) の一般解が

$$u = A \log r + B - \frac{p_H - p_L}{4\mu L} r^2 \quad (*43)$$

となることを示せ。次に境界条件 (\*42) を課し、また領域内部で  $u$  が発散することはないという条件を課すことにより、係数  $A, B$  を決定し、 $u$  を求めて図示せよ (教科書の図 46.1 のようになるはず)。

円管をとる流量を

$$Q = \int_{\text{円管断面}} u \, dS = \int_0^a u \cdot 2\pi r \, dr$$

とする。流れが平行流と見なせる場合、式 (\*41) の解を用いて  $Q$  を計算することができて、結果は

$$Q = \frac{p_H - p_L}{L} \times \frac{\pi a^4}{8\mu} \quad (46.8)$$

となる (Hagen–Poiseuille の法則)。式 (46.8) を応用し、毛細管を用いた実験により流体の粘性を測定することができる<sup>§</sup>。

### 練習問題 21

式 (46.8) を導出せよ。また、左辺と右辺の次元が合っていることを確認せよ。

### 練習問題 22

Hagen–Poiseuille の法則を Navier–Stokes 方程式から導出する過程を自力で再現せよ。

### 同心円状の流れ

一方向流れの次に簡単な流れとして、円柱座標 (\*16) において速度がつねに  $\mathbf{e}_\theta$  方向であるような流れを考える。このとき、すべての流体要素は同心円を描いて運動することになる。

このような流れを調べるため、速度および圧力を

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\theta, \quad v = v(r, t); \quad p = p(r, t) \quad (*44)$$

<sup>§</sup> 鳥取大学の物理学実験の教科書を見よ。

と置いて、連続の式および Navier–Stokes 方程式に代入してみよう。まず

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \cdot (v \mathbf{e}_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \partial_r (v \mathbf{e}_\theta) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \partial_\theta (v \mathbf{e}_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot (\partial_r v) \mathbf{e}_\theta + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot (-v \mathbf{e}_r) = 0 \end{aligned} \quad (*45)$$

となるから、式 (\*44) の速度場は、これ以上の条件を課さなくても、既に連続の式を満たしていることが分かる。他方、式 (\*15) を用いて  $\Delta \mathbf{v}$  を計算すると

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (*46)$$

となることから<sup>¶</sup>、

$$\begin{aligned} &[\text{Navier–Stokes 方程式の右辺}] \\ &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ &= -\mathbf{e}_r \partial_r p + \mu \left( \partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

である。さらに  $\mathbf{v} \cdot \nabla = (v/r) \partial_\theta$  より

$$\begin{aligned} &[\text{Navier–Stokes 方程式の左辺}] \\ &= \rho (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \rho \partial_t (v \mathbf{e}_\theta) + \frac{\rho v}{r} \partial_\theta (v \mathbf{e}_\theta) \\ &= \rho (\partial_t v) \mathbf{e}_\theta - \frac{\rho v^2}{r} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

であるので、係数比較により

$$r \text{ 方向: } -\frac{\rho v^2}{r} = -\partial_r p \quad (*47)$$

$$\theta \text{ 方向: } \rho \partial_t v = \mu \left( \partial_r^2 v + r^{-1} \partial_r v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (*48)$$

を得る。定常な場合には、どちらの方程式も常微分方程式となり、 $\partial_r$  は  $d/dr$  に読み替えられる。

**練習問題 23**

式 (\*46) を導出せよ。

**練習問題 24**

Navier–Stokes 方程式から式 (\*47)(\*48) を導出する過程を、プリント等を見ずに自力で再現せよ。

<sup>¶</sup> 式 (\*38) と違って、式 (\*46) はスカラー場に対する Laplacian とは一致せず、 $-v/r^2$  という余計な項がついている。これは、式 (\*44) の  $\mathbf{e}_\theta$  が  $\theta$  によって変化するためである。

**円筒 Couette 流れ**

式 (\*47)(\*48) が適用される場合のうち、特に、円筒状の壁の運動によって駆動される流れについて考える。流れは定常であるものとする、速度  $v$  は

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + r^{-1} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \quad (*48')$$

という ODE に従う。内側の円筒の半径を  $R_1$ 、外側の円筒の半径を  $R_2$  としよう。外側の円筒は静止し、内側の円筒が角速度  $\Omega$  で回転しているものとする、境界条件は

$$v|_{r=R_1} = R_1 \Omega, \quad v|_{r=R_2} = 0 \quad (*49)$$

と書ける。

**練習問題 25**

境界条件 (\*49) のもとで微分方程式 (\*48') の解を求め、流れの様子を図示せよ。

**練習問題 26**

式 (\*49) とは逆に、内側の円筒を静止させて外側の円筒を回転させた場合について、微分方程式 (\*48') の解を求め、流れの様子を図示せよ。

**おまけ**

内側の壁を回転させた円筒 Couette 流れでは、回転が速くなると式 (\*44) のようなバウムクーヘン状の流れは不安定となり、 $(r, z)$  面内での流れを伴うロール状の渦 (Taylor 渦) ができる。他方、内側の壁を止めて外側の壁だけを回転させても、そのようなことは起きない。両者の違いについて考えるには、式 (\*47) から圧力  $p$  を求めて比較してみるとよい。何らかのきっかけで流体要素が  $r$  方向に移動したときに流体を押し戻せるかどうかという点から考えると、おおまかに言って  $p = p(r)$  が上に凸か下に凸かが重要であり、その点に関して、両者の結果には明確な違いがあることが分かるだろう。

**渦度の拡散**

以下では、壁のない無限領域での渦流れを考える。

同心円状の流線をもつポテンシャル流れとして

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\theta, \quad v = -\frac{\kappa}{r} \quad (19.9)$$

というものがあり、渦糸と呼ばれている (教科書の §9 および §27 を見よ)。流れ (19.9) において、渦度は  $z$  軸上 ( $r = 0$  のところ) にデルタ関数的に集中しており、それ以外の領域では渦度はゼロである。

渦糸 (19.9) は Euler 方程式の定常解であるが、Navier-Stokes 方程式の場合はそうはならない<sup>||</sup>。粘性により、渦糸は時間とともに拡散し、渦度をもつ領域は有限の大きさの領域に広がる。その広がりの代表長さを  $\delta$  とすると、

$$\delta \propto \sqrt{\nu t} \quad (46.13)$$

である。別の言い方をすると、渦度の広がりの大きさが 0 から  $\delta$  まで達するのに要する時間は

$$t \sim \delta^2 / \nu \quad (*50)$$

で与えられる。記号  $A \sim B$  は、ここでは「係数を無視すれば  $A$  と  $B$  の大きさがほぼ等しい」という意味で用いている (たとえば  $1 - \cos \theta \sim \theta^2$ )。

**練習問題 27**

渦度の拡散する広がりの大きさは、動粘性係数  $\nu$  と経過時間  $t$  を用いて

$$\delta \sim \nu^a t^b$$

のように書けるはずである。次の合う組み合わせは、式 (46.13) すなわち  $a = b = 1/2$  に限られることを示せ。

初期条件を理想的な渦糸 (19.9) とした場合について、Navier-Stokes 方程式の解を具体的に求めることができる<sup>\*\*</sup>。それには、

$$v = -\frac{\kappa}{r} f(s), \quad s = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \quad (*51)$$

と置いて式 (\*48) に代入する。ここで  $s$  は  $r, t, \nu$  を組み合わせて無次元になるように作った変数である。詳しい計算過程は (宿題なので) すべて省略し、結果のみを示すと

$$v = \frac{(\text{定数})}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (*52)$$

<sup>||</sup> 円筒壁を設けて強制的に流れを駆動すれば話は別だが。

<sup>\*\*</sup> これを求めよ、というのが 3 回目のレポート課題の内容。

となる。この解 (\*52) は、それぞれの時刻における速度場が互いに相似な形になっているため、相似解と呼ばれる。式 (\*51) の変数  $s$  のようなものを用いて PDE を ODE に帰着させ相似解を求める方法を相似解の方法または相似変数の方法という。

式 (\*52) による速度分布の時間変化の様子をグラフにすると、速度  $v$  は、ほぼ  $r \sim 2\sqrt{\nu t}$  (より正確には  $r/\sqrt{\nu t} = 2.2418$ ) で極大をもち、遠方では式 (19.9) に漸近する曲線となる。内側の領域 ( $r < 2\sqrt{\nu t}$ ) では、流体は有限の渦度をもって自転している。この領域の広がりはおよそ  $2\sqrt{\nu t}$  であって、こうして式 (46.13) が裏付けられる。

**練習問題 28**

$(x, z)$  平面上 (すなわち  $y = 0$  の位置) に無限に広い平板があり、粘性流体が  $0 < y < +\infty$  の領域を満たしている。最初は平板も流体も静止していたが、時刻  $t = 0$  において、平板が  $+x$  方向に一定速度  $U$  で動き出した。このとき流体中に生じる流れは

$$u = U (1 - \text{erf} \eta), \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (46.11)$$

のようにあらわされることを示せ。

方針: 相似変数の方法でもよいし、正弦 Fourier 変換を用いてもよい。どちらでも同じ結果が得られる。

式 (46.11) の流れは、渦度場であらわすと

$$\omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \quad (*53)$$

と書ける (粘性条件のもとで式 (\*53) を  $y$  で積分すると速度場の式 (46.11) が得られる)。式 (\*53) から、有限の渦度をもつ領域は平板の近傍に限定されること、また、この場合にも、渦度をもつ領域の広がりについて関係式 (46.13) が成り立っていることが分かる<sup>††</sup>。

**境界層の厚さ**

教科書の図 46.3 のように、平らな板が流れに平行に置かれているとする。下流に進むにつれて境界層は少しずつ厚くなる。境界層の厚さが増加する主な機構

<sup>††</sup> 比例係数は、判定基準によって 2 だったり 4 だったりするが (教科書の式 (46.13) では係数は 4 になっている) いずれにしても、 $\delta$  が  $\sqrt{\nu t}$  に比例することに変わりはない。

は粘性による拡散であるとするれば、境界層の厚さについて、式 (46.13) と同様の関係式が成り立つはずである。ただし、経過時間  $t$  の代わりに、流体が板の影響を受けはじめてから位置  $x$  に来るまでにかかった時間、すなわち  $x/U$  をとる。これにより、位置  $x$  での境界層の厚さは

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (*54)$$

のように見積もることができる。なお、右辺には 2 とか 4 とかいう係数がつくはずだが、簡単化のため、係数は無視して話を進める。

**練習問題 29**

境界層の厚さは、 $\nu$  と  $x/U$  を用いて

$$\delta \sim \nu^a (x/U)^b$$

で表せるはずである。次元のつじつまが合うように  $a$  と  $b$  を定めることにより、式 (\*54) を導出せよ。

板の全長を  $L$  としよう。式 (\*54) によると、境界層の厚さの最大値は

$$\delta_{\max} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}}$$

のように見積もられる。ここで、Reynolds 数が

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (*55)$$

であることを思い出すと、境界層の厚さは

$$\delta_{\max} \sim \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (*54')$$

と書ける。式 (\*54') から、Reynolds 数が大きい流れでは、 $L$  に比べると相対的に境界層は薄いことが確認できる。

**練習問題 30**

風速  $U = 1.5 \text{ m/s}$  の気流のなかに、長さ  $L = 10 \text{ cm}$  の板が流れに平行に置かれているとする。この場合の Reynolds 数を求めよ。さらに、式 (\*54') が適用できるものとして、境界層の厚さを概算せよ。

**おまけ**

式 (\*54) は層流境界層に対する式である。Reynolds 数があまりにも大きくなると (たとえば 10 万とか 100 万とか) 境界層が乱流化し、式 (\*54) は適用できなくなる。また、物体の形状やその他の条件によっては、そもそも流体が物体にそって流れることが困難となり、境界層が途中で剥離する場合がある (教科書の図 48.2 を見よ)。こういう場合も、当然、式 (\*54) の適用範囲外となる。

**平板境界層に対する Blasius の解**

図 46.3 のような場合の流れの様子を、Navier-Stokes 方程式に基づいて考えてみよう。この場合、境界層の厚さ (渦度領域の  $y$  方向への広がり) が板の寸法に比べて薄いということに基づき、Navier-Stokes 方程式を以下のように簡単化することができる:

- 圧力は未知量ではなく、境界層の外側の流れによって決まる既知量と考えてよい。
- $y$  方向の速度勾配は  $x$  方向の速度勾配に比べてずっと大きいので、粘性項において  $\mu \partial_y^2 u$  は残すべきだが、 $\mu \partial_x^2 u$  は無視してよい。

これを境界層近似という。今の場合、境界層近似および定常流れの仮定により、Navier-Stokes 方程式は

$$u \partial_x u + v \partial_y u = \nu \partial_y^2 u \quad (48.11)$$

のように簡単化できる。境界条件は、板の表面では粘着条件であり、また  $y \rightarrow +\infty$  では  $u$  は一様流の速度  $U$  に漸近するものとする。

方程式 (48.11) は、相似変数の方法で解くことができる。相似変数としては  $y/\delta$  に相当するものを考え、

$$u = u(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (*56)$$

と置く。変数の連鎖が  $(x, y) \rightarrow \eta \rightarrow u$  となっていることに注意し、連鎖則を用いて  $u$  の微分を計算する:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{du}{d\eta} = -\frac{\eta}{2x} \frac{du}{d\eta} \\ \partial_y u &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{du}{d\eta} \\ \partial_y^2 u &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{du}{d\eta} \right) = \frac{U}{\nu x} \frac{d^2 u}{d\eta^2} \end{aligned}$$

さらに、連続の式から

$$v = -\partial_x \int u \, dy = -\partial_x \Psi, \quad \Psi = \int u \, dy \quad (*57)$$

と書ける (Ψ は流れ関数と呼ばれる)。この積分の変数を η に変換しよう。積分のなかでは x を固定していることに注意すると、式 (\*56) より

$$d\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \, dy$$

となるから、Ψ の積分は

$$\Psi = \int u \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \, d\eta = \sqrt{\nu U x} \int \frac{u}{U} \, d\eta$$

と書ける (無次元になるように u/U の形を作った)。もともとの仮定により u = u(η) だから、右辺にある不定積分は η のみの関数となる。この積分を f(η) と書き、式 (\*57) から v を求めると

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \sqrt{\nu x U}}{\partial x} f - \sqrt{\nu U x} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} f - \sqrt{\nu U x} \left( -\frac{\eta}{2x} \frac{df}{d\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( -f + \eta \frac{df}{d\eta} \right) \end{aligned} \quad (48.16)$$

となる。以上の結果を方程式 (48.11) に代入し、さらに u については

$$u = \partial_y \Psi = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d}{d\eta} (\sqrt{\nu U x} f) = U \frac{df}{d\eta}$$

を用いて f であらわす。結果を整理すると

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (*58)$$

という非線形の ODE が得られる。あとはこの ODE を数値的に解くことにより、平板上の境界層の速度プロファイル (図 1) が得られる。これを Blasius の解という。

**練習問題 31**

Navier-Stokes 方程式から方程式 (\*58) を導く過程を、プリントなどを見ずに自力で再現せよ。

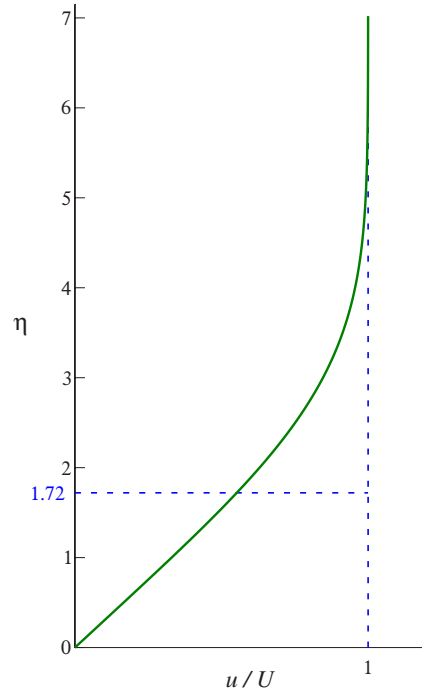


図 1: 方程式 (\*58) を数値的に解いて得られる、平板上の境界層の速度プロファイル。

**おまけ**

境界層厚さに関する式 (\*54) では、あえて係数を無視しているが、係数まで含めて境界層の厚さをきちんと定義する方法がないわけではない。最もよく使われる定義のひとつが排除厚さと呼ばれるものである。壁から十分に遠くて u が一様流と見なせるような位置を適当に選び、この位置を y = y\* としよう。このとき、0 < y < y\* の範囲を通る流量は、速度プロファイルが分かっているならば

$$\int_0^{y^*} u \, dy$$

で与えられる。これは、境界層が占める厚さのぶんだけ U y\* よりも小さいはずである。そこで

$$\int_0^{y^*} u \, dy = (y^* - \delta_D) U \quad (y^* \rightarrow +\infty)$$

によって排除厚さ δ\_D を定義する (言わば「y = δ\_D の位置に“見えない壁”があって流体を排除しているが、その外は「一様流」という状況に置き換えて考える)。平板上の境界層の場合、式 (\*58) の数値解から δ\_D を計算すると

$$\frac{\delta_D}{\sqrt{\nu x / U}} = 1.72 \quad \text{すなわち} \quad \delta_D = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

という結果が得られる (図 1 の点線)。もちろん係数を無視すれば式 (\*54) と同じになる。