

中間試験 (6/7) にそなえて講義ノートを見直す際に注意してほしいポイントや、講義でゆっくり説明できなかった事項をまとめた。ただし、このプリントだけ勉強すれば完璧だというわけではない (ほかにも復習しておくべきものはある)。そのほか、中間試験にはおそらく出ないけれども、あとで (他の講義とか卒業研究とか就職してからの仕事などで) 役に立つのではないと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておこう。

### 粘性流体の基礎知識

非圧縮の粘性流体の運動の支配方程式は、教科書\*の式 (40.1) および (40.2)、すなわち

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_{\text{外力}} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (40.1')$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (40.2)$$

で与えられる。式 (40.1') を Navier-Stokes 方程式という。ただし、式 (40.1') では、質量あたりの外力  $\mathbf{K}$  の代わりに、体積あたりの外力  $\mathbf{F}_{\text{外力}} = \rho \mathbf{K}$  を用いた。他の記号は教科書に合わせてあるので各自で確認すること。

一般に、方程式とは未知数 (未知量) を含む等式を意味する。Navier-Stokes 方程式の場合、求めるべき未知量は、速度場  $\mathbf{v}$  と圧力場  $p$  である。特に速度場について、式だけ書いてもどのような流れかイメージできないようでは困るので、速度場の図示の仕方を練習しておくこと。また、このプリントでは、添字を用いる都合上、速度場の成分を  $\mathbf{v} = (u, v, w) = (v_x, v_y, v_z)$  とする。

#### 練習問題 1

2 次元および 3 次元の場合に対し、式 (40.1')(40.2) を成分表示で書き直せ。

#### 練習問題 2

速度場が  $x$  と  $y$  の何らかの式で与えられたとして、その式があらわす流れを多数の小さな矢印で図示する方法について、具体例を挙げて説明せよ。

#### おまけ

圧縮性流体の場合には、非圧縮条件 (40.2) すなわち非圧縮流体の連続の式を一般の連続の式 (3.2) で置き換えるのは当然として、さらに  $p$  と  $\rho$  を結びつける関係式が必要となる。特に気体の場合、理想気体の状態方程式が適用できるものとして

$$p = \rho RT \quad (R \text{ は質量あたりの気体定数})$$

とするのが普通である。この式は温度  $T$  を含むため、さらに内部エネルギーの balance law と連立させる必要がある。

粘性流体の流れの様子は、おもに、Reynolds 数とよばれる無次元パラメータで特徴づけられる ( $R$  または  $Re$  であらわす)。これは、Navier-Stokes 方程式 (40.1') の左辺に含まれる移流項  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  と、右辺に含まれる粘性項  $\mu \Delta \mathbf{v}$  との相対的な大きさをあらわしたものである。

たとえば直径  $D = 3 \text{ cm}$  の棒が速さ  $U = 10 \text{ m/s}$  の水の流れのなかに置かれている場合、Reynolds 数は

$$Re = \frac{\rho_{\text{water}} U D}{\mu_{\text{water}}} = \frac{(10 \text{ m/s})(3 \text{ cm})}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3 \times 10^5 \quad (*1)$$

となる。ただしここで常温の水の動粘性係数が

$$\frac{\mu_{\text{water}}}{\rho_{\text{water}}} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (*2)$$

であることを用いた。

空気の密度は水の約  $1/1000$  で、粘性係数は  $1/100$  より少し大きいので、動粘性係数は水の  $10$  倍  $\sim 20$  倍程度となる (温度によって多少変化する)。具体的な値は、理科年表で調べるか、または教科書の p.186 を見ること。

#### 練習問題 3

他の条件は式 (\*1) と同じだとして、水の代わりに空気をを用いた場合の Reynolds 数を計算せよ。

#### 練習問題 4

動粘性係数  $\nu = \mu/\rho$  と代表速度  $U$  を組み合わせ、

$$\ell = \nu^a U^b$$

の形で長さの次元をもつ量を作る。まず、条件を満たす組み合わせは  $(a, b) = (1, -1)$  に限られることを示せ。さらに、物体の寸法と  $\ell$  の比は Reynolds 数にほかならないことを示せ。

#### おまけ

Navier-Stokes 方程式にせよ Euler 方程式にせよ、具体的な流れをあらわす解を考えるには、流体が占める領域の果てすなわち境界面での条件を与える必要がある。多くの場合、流体にとっての境界面とは、流体と物体が接する壁面のことである。Navier-Stokes 方程式で記述されるような粘性流体に対しては、固体壁面での境界条件は粘着条件となる。詳しくは中間試験が終わったあとに説明する。

\* 今井功「流体力学」(岩波書店 物理テキストシリーズ 9)

## 方程式の立て方としての balance law

流体の方程式を立てるときの重要な考え方のひとつは、何らかの保存量 (質量・運動量など、勝手に増減することのない量) に着目して

$$[\text{残高 (after)}] - [\text{残高 (before)}] = \sum [\text{収入} \cdot \text{支出}] \quad (*3)$$

という式を立てることである。これを balance law (収支釣り合いの法則) という。

## 練習問題 5

日常的な事柄で balance law が適用できる例をいくつか挙げよ。

具体的に balance law を用いて微分方程式をたてる練習をしよう。物事をしっかり考えて理解するためには、単純なものから複雑なものへと順を追って進むのがよいので<sup>†</sup>、ここでもそのようにする。いちばん考えやすいのは空間分布を考慮しなくてよい場合で、たとえば、4/26 に扱った、タンクの中の水の量についての例題がその一例である (各自で確認しておくこと)。この場合は、時間を  $\Delta t$  で刻むだけでよく、空間のほうを切り刻む必要がない。結果として、水の量に対する ODE が得られる。

次に簡単な場合として、空間分布はあるけれども、考えるべき量がスカラーであるような場合が挙げられる。具体的には、熱<sup>‡</sup>や質量などの空間分布を扱う問題がこれに相当する。こういう量が空間分布しているときに balance law を適用するためには、何らかの仮想的な面で囲まれた領域に着目し、その領域のなかにある“総量”の時間変化を考える。この面のことを検査面<sup>§</sup>と言い、検査面に囲まれた領域のことを検査体積という。検査体積のなかにある熱量そのものには  $x$  方向とか  $y$  方向とかいった向きはなくて、大きさだけを考えればよい (実際問題としては温度の高低に置き換えて扱う)。他方、熱の流れなどには方向があり (少なくとも検査面に対して出る向き・入る向き・どちらでもない向きなどが考えられる) これはベクトルとして扱う必要がある。このことも考慮して balance law を適用することにより、スカラー場に対する PDE が得られる。

面倒なのが Navier-Stokes 方程式のような場合で、この場合は、balance law としては運動量保存則を扱うこと

<sup>†</sup> 今年の数理工学演習 I を受講している人は、配布資料のどこかに書いてあるはずなので、しっかり見直しておくこと。

<sup>‡</sup> 本当はエネルギー (エンタルピー) を考えるべきだけれど、直感的に分かりやすいように「熱」としておく。

<sup>§</sup> なぜ検査面 (control surface) と言うかというと、全ての出入りを検査し把握する関所のような機能をもつ面を考えているからだ。出入国審査の “passport control” などと似た用語である。

になり、運動量はベクトル (向きと大きさがある量) であるため、それなりに複雑なことを考える必要がある。そこで、そういう複雑な問題は後回しにして、まずはそれよりも簡単な、熱に対する balance law を考えてみよう。

固体中の熱伝導を考える。簡単化のため、ここでは、温度分布が  $T = T(x, t)$  のように 1 次元的であって  $y$  や  $z$  によらないとしよう。考えている系を  $x$  方向に切り刻み、幅  $\Delta x$ 、体積  $S\Delta x$  の微小要素の集まりと考えて、それぞれの微小要素の持っている熱量について balance law を適用する。3 次元的な問題では、微小要素 (検査体積) はもちろん  $\Delta x\Delta y\Delta z$  などとする必要がある。

ある要素に着目しよう。その要素の持っている熱量は、その要素の位置での温度を  $T$  として

$$[\text{微小要素のもつ熱量}] = [\text{微小要素の熱容量}] \times T$$

と書いて、比熱 (質量あたりの熱容量) を  $c$  とすると微小要素の熱容量は  $c\rho S\Delta x$  だから

$$[\text{微小要素のもつ熱量}] = \rho ScT\Delta x$$

となる。この熱量について、微小な経過時間  $\Delta t$  の前後での balance law の式を書く。固体なので流れはなく、熱量の変動はすべて熱流  $q$  によるものだとしよう。着目している要素の位置を  $x_i$  とし、その隣の要素の位置を  $x_{i\pm 1} = x_i \pm \Delta x$  とすると、

$$\begin{aligned} \rho ScT|_{t+\Delta t} \Delta x - \rho ScT|_t \Delta x \\ = q(x_{i-1} \rightarrow x_i) S\Delta t + q(x_{i+1} \rightarrow x_i) S\Delta t \\ = q(\text{左}) S\Delta t - q(\text{右}) S\Delta t \end{aligned} \quad (*4)$$

となる。ただし検査面を通る熱量について

$$\begin{aligned} q(\text{左}) &= q(x_{i-1} \rightarrow x_i) \\ q(\text{右}) &= q(x_i \rightarrow x_{i+1}) = -q(x_{i+1} \rightarrow x_i) \end{aligned}$$

を用いた。式 (\*4) の両辺を  $S\Delta x\Delta t$  で割ると

$$\rho c \frac{T|_{t+\Delta t} - T|_t}{\Delta t} = -\frac{q(\text{右}) - q(\text{左})}{\Delta x}$$

となり、連続極限をとって

$$\rho c \partial_t T = -\partial_x q \quad (*5)$$

を得る。3 次元の場合は、向かい合った面どうしを組み合わせさせて balance law の式を書くと、自然に

$$\partial_x(\cdots) + \partial_y(\cdots) + \partial_z(\cdots)$$

という divergence の形が出てくる。

ダイバージェンス

## 練習問題 6

式 (\*4) の考え方を 3 次元の場合に拡張し、熱量の balance law を微小な直方体の微小要素に適用して、

$$\rho c \partial_t T = -\operatorname{div} \mathbf{q} \quad (*6)$$

という式を導け。ただしここで  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  は熱流ベクトルである。(ヒント: たとえば  $y$  方向の検査面については  $q_y$  だけ考えればよい。)

式 (\*5) は  $T$  と  $q$  についての式なので、これを  $T$  だけで表したい。熱流  $q$  は、隣り合った要素のあいだに温度差があるとそれを小さくする方向に発生し、今の場合は

$$q = -\lambda \partial_x T \quad (*7)$$

と書けることが分かっている<sup>¶</sup>。これを式 (\*5) に代入し、定数をうまく置き直すと、 $T$  は 1 次元熱伝導方程式

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T \quad (*8)$$

に従うことが示される。

## 練習問題 7

熱に対する balance law から出発して式 (\*8) に至る過程を、資料や講義ノートを見ずに<sup>||</sup>自力で示せ。

## 練習問題 8

熱伝導方程式 (\*8) の 3 次元版はどのような式になるか? 導出も含めて示せ。また、Navier-Stokes 方程式と部分的に類似している点を説明せよ。

## 練習問題 9

質量に対する balance law を考え、 $\rho$  が定数でない場合を含む連続の式

$$\partial_t \rho + \sum_j \partial_j (\rho v_j) = 0 \quad (3.2')$$

を導出せよ。

## Navier-Stokes 方程式の立てかた

Navier-Stokes 方程式 (40.1') を立てるには、空間に固定された検査体積を用いて運動量収支 (運動量の bal-

<sup>¶</sup> 差分で書いたほうが意味がはっきりするかもしれない。それについては講義ノートを見よ。

<sup>||</sup> こういう場合の勉強方法: まず最初に資料や講義ノートをよく読んで道筋を把握したあと、資料を見ずに白紙のノートに自力で内容を書いてみる。詰まった時は、ノートを開いて資料を少しだけ見てから、再びノートを開いて資料なしで進めるところまで進み、またちょっとだけ資料を見て... という具合にすると良い。

ance law) を考える。検査体積として微小な直方体 (体積  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ) を考えると、検査体積内にある質量は  $\Delta m = \rho \Delta V$  なので

$$\left[ \begin{array}{c} \text{検査体積内} \\ \text{の運動量} \end{array} \right] = \Delta m \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \Delta V$$

となる。運動量の出入りは力積だから、運動量収支は

$$\begin{aligned} & (\rho \mathbf{v})|_{t+\Delta t} \Delta V - (\rho \mathbf{v})|_t \Delta V \\ &= \sum [\text{検査体積内の流体が受ける力積}] \quad (*9) \end{aligned}$$

のように書ける ( $\Delta V$  は時間変化しないことに注意)。

式 (\*9) の右辺の内訳として、

- 外力 (重力など) による力積
- 流体とともに検査面を通して流入する運動量
- 圧力による力積
- 粘性応力による力積

などを考慮する必要があるが、このなかで、特に 3 番目と 4 番目に着目する (両方を合わせて「面積力」として一緒に扱う場合もある)。4 番目の項の有無が、流体力学 I で扱った Euler 方程式と、流体力学 II で扱う Navier-Stokes 方程式との違いである。また 2 番目の項は移流項\*\*と呼ばれ、最終的には加速度のなかに  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  という非線形項の形で現れる。これは Euler 方程式と同じなので、この資料では説明を省略する (各自で流体力学 I のノートを見て復習しておくこと)。

面積力のうち、圧力項を考える。圧力の特徴は、方向性をもたない (等方的である) こと、すなわち面の方向がどうであっても常に面に垂直な力として作用し、しかも大きさが面の方向に依存せず、同じ位置では同じ大きさを持つことである<sup>††</sup>。これを数学的に言いあらわすと、圧力  $p$  はスカラーであり、圧力によって面  $\Delta S$  に作用する力のベクトルは、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{圧力}} = -p \mathbf{n} \Delta S \quad (*10)$$

のように与えられる。これを用いて、 $\Delta V$  の 6 つの面にはたらく圧力による力積を求める。講義ノートやグループワーク資料にあるように、向かい合った面どうしを組

\*\* 「対流項」とも言う。対流と言っても、ぐるぐる回る流れという意味ではなく、流れに運ばれるという意味である。

<sup>††</sup> 圧力の性質についての実験を思い出そう: 流体に圧力をかけると、星型スポンジは形を保ったまま大きさだけが小さくなる。

み合わせて計算すると<sup>††</sup>、結果は

$$[\text{圧力による力積}] = -(\text{grad } p) \Delta V \Delta t \quad (*11)$$

となる。

#### 練習問題 10

式 (\*11) の導出過程を示せ。

#### 練習問題 11

式 (\*11) の意味を具体的な状況のもとで読み解け。たとえば、ほぼ 1 次元的な流体運動があって、そのなかのある検査領域に着目すると、その左隣よりも右隣のほうが圧力が高いとする。この場合、式 (\*11) は何を言っていることになるのか？

同様に粘性応力を考えよう。粘性応力は、流体の変形にさからうように発生する面積力である。粘性応力によって面  $\Delta S$  に作用する力は、面に垂直とも平行とも限らず

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{\text{粘性}} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} n_x \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} n_y \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} n_z \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z \end{bmatrix} \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Delta S \quad (*12) \end{aligned}$$

のようにあらわされる。式 (\*10) と式 (\*12) を見比べると、力が面積に比例することや面の方向に依存することは同じである。また、 $\Delta \mathbf{F}_{\text{圧力}}$  や  $\Delta \mathbf{F}_{\text{粘性}}$  はもちろんベクトルだが、 $p$  や  $\tau$  はベクトルではないという点も同じである。重要な違いは、式 (\*10) が  $p$  という 1 つのスカラーであらわされるのに対し、式 (\*12) は  $3 \times 3$  の正方行列 (粘性応力テンソル) であらわされるという点にある。

#### 練習問題 12

面の方向が  $+y$  方向 (すなわち  $(z, x)$  面に平行で、 $+y$  の側が表側) であるとき、この面に作用する粘性力は  $(\tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{zy}) \Delta S$  となることを説明せよ (ヒント: この面の単位法線ベクトルを式 (\*12) に代入)。また、他の面についても同じことを考え、 $\tau_{ij}$  のふたつの添字のうちの片方は力の方向を、もう片方は面の方向を示していることを確認せよ。

<sup>††</sup> ここでは検査体積として微小な直方体を考えているので、引き算になるような組み合わせを作ること、結果をただちに微分に直すことができる。検査体積が微小でない場合は、教科書 §3 のように、Gauß の定理を用いて微分に直す必要がある。

検査面としてとった直方体の 6 つの面のうち、位置  $z$  にあり  $(x, y)$  面に平行な面を  $\textcircled{E}$  とし、これに平行で位置  $z + \Delta z$  にある面を  $\textcircled{F}$  とする。ここで、たとえば

$$[\textcircled{E} \text{ の面が受ける粘性力}] = \Delta \mathbf{F}_{\textcircled{E}}$$

のように示すことにしよう ( “粘性” の表記は省略 )。さて

$$[\textcircled{E} \text{ の面の単位法線ベクトル}] = (0, 0, +1)$$

$$[\textcircled{F} \text{ の面の単位法線ベクトル}] = (0, 0, -1)$$

で、面積はどちらも  $\Delta x \Delta y$  だから、式 (\*12) より

$$\Delta \mathbf{F}_{\textcircled{E}} = + (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz})|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta \mathbf{F}_{\textcircled{F}} = - (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz})|_z \Delta x \Delta y$$

である。したがって、力積の (たとえば)  $y$  成分が

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{F}_{\textcircled{E}} + \Delta \mathbf{F}_{\textcircled{F}})_y \Delta t &= (\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z) \Delta x \Delta y \Delta t \\ &= \frac{\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \rightarrow \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

のように計算できる。さらに  $\textcircled{E} \textcircled{F}$  以外の全ての面を含めた合計を考え、力積の 3 つの成分を同様に計算すると

$$[\text{粘性応力による力積}] = \sum_j \begin{bmatrix} \partial_j \tau_{xj} \\ \partial_j \tau_{yj} \\ \partial_j \tau_{zj} \end{bmatrix} \Delta V \Delta t \quad (*13)$$

となる (ここで  $\sum$  は  $j = x, y, z$  に対する和を示す)。

#### 練習問題 13

式 (\*13) の導出過程を (手抜きせずに) 書き、結果を  $\sum$  なしで示せ。

#### おまけ

2 階のテンソルとは、(多少乱暴な言い方をすると) ベクトルとベクトルを結びつける正方行列のことである。あるいは “ベクトルを成分とするベクトル” と考えてもよい。物理的なベクトルは座標軸の取り方に応じて見掛けの成分表示が変わるが、ベクトルそのものは変わらない。テンソルについても同じことが言えて、たとえば  $x$  軸と  $y$  軸を入れ替えると  $xx$  成分・ $yy$  成分・ $xy$  成分・ $yx$  成分が入れ替わる。このような挙動を示す正方行列がテンソルである (詳しくは教科書の §43 を見よ)。

テンソルを含む式は、すべてを書くと長くなってしまいがちだが、式 (\*13) のように  $\sum_j$  を用いると多少は短くなる。さらに “同じ添字が重複しているときは  $\sum$  を補って読む” と取り決めて、 $\sum$  を省いてしまうことも多い。この取り決めに Einstein の総和規約という。相対性理論では同じことを 4 回書くので、Einstein の総和規約が威力を発揮する。

Navier–Stokes 方程式の粘性項の導出における式 (\*13) の段階は、熱伝導方程式で言えば式 (\*5) や式 (\*6) に相

当する。このままだと粘性応力  $\tau$  が未知数なので、これだけでは解けない。ちょうど熱伝導方程式の場合に  $q$  を式 (\*7) によって  $\lambda$  と  $T$  で表したように、粘性応力  $\tau$  を物質の性質および他の変数に関係づける式 (構成関係式) が必要である。流れがない時には粘性応力はゼロになるはずだから、 $\tau$  を速度  $v$  に関係づけられればよいと思われるが、速度はベクトルなので、これをいきなり考えるのは大変である。そこで、まずは速度ベクトルが 1 成分だけの簡単な場合について、粘性応力と速度の関係を考えてみることにしよう。

### 単純剪断流における粘性応力

熱流の式 (\*7) に相当する役割を粘性応力に対して果たす構成関係式を見つけるために、粘性流体の流れのなかで最も基本的な単純剪断流 (simple shear flow) について考察しよう。簡単化のため、しばらく 2 次元で考える。流れの方向に  $x$  軸をとると、単純剪断流は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\dot{\gamma} = \text{const.}) \quad (*14)$$

とあらわされる。

### 練習問題 14

単純剪断流の速度ベクトル場 (\*14) を図示せよ。

### 練習問題 15

単純剪断流において、位置  $(x, y)$  に点 A を取り、そこから  $\overrightarrow{AB} = (0, \Delta y)$  だけ離れたところに点 B をとる。A と B の速度差  $v(B) - v(A)$  を求めよ。

単純剪断流 (\*14) は、厚さ  $\Delta y$  のトランプのカードをたくさん積み重ねたものとして思い描くことができる。流体における粘性応力とは、“カード” のあいだに速度差があると、隣のカードに引きずられて速度が変化するという効果である。適当な 2 つの“カード” のあいだに検査面をとり、この面をとおしてやりとりされる運動量について考えよう。引きずり自体は  $x$  方向の力 ( $x$  方向の加速・減速) であり、検査面の向きは  $y$  方向であるから、応力テンソルの成分としては  $\tau_{xy}$  について考えることになる。このような場合、通常の流体では、 $\tau_{xy}$  は速度勾配  $\partial_y u (= \dot{\gamma})$  に比例することが知られていて、

$$\text{単純剪断流の場合: } \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \dot{\gamma} \quad (*15)$$

と書ける。比例係数  $\mu$  は粘性係数と呼ばれる。

### 歪みテンソルと歪み速度テンソル

式 (\*15) を一般化して、任意の流れに対して粘性応力テンソルの各成分を求められるようにしたい。素朴に考えると、式 (\*15) の  $\partial_y u$  を

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} \quad (*16)$$

という正方行列 (速度勾配テンソル) で置き換えて“ $\tau$  は  $\mu \mathbf{L}$  に等しい”とすれば良いような気がするが、これではダメである。それなら代わりに何を用いるべきか? というのが問題で、答えを一言で言うと歪み速度テンソルを用いればよい。歪み速度テンソルは、速度勾配テンソルを対称化したものである。このことを理解するために、しばらく流体の代わりに弾性体で考えてみる\*。

### おまけ

速度勾配テンソルをそのまま用いて粘性応力を求めようとしてもうまくいかないことを示す例として、剛体回転が挙げられる。剛体回転は流体の変形を伴わない運動であり、ある意味で流体が止まっているのと同じなので (カメラを流体の動きに合わせて動かしながら撮影することを考えよう)、粘性応力  $\tau$  はゼロである。ところが、この場合に速度勾配  $\mathbf{L}$  を計算してもゼロにならないので「 $\tau$  と  $\mathbf{L}$  が比例する」という考えは破綻する。

### 弾性体の変形

消しゴムに半径  $r_0$  の円を描き、消しゴムを適当に変形させて、円がどうなるか観察しよう。変形前の各点の位置を  $\mathbf{X}$ 、変形後の位置を  $\mathbf{x}$  と置き、

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos \theta \\ r_0 \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

として、変形を

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (*17)$$

という線形写像であらわす (ここで  $\alpha$  は講義ノートの  $\tilde{\mathbf{e}}$  に相当する)。一般には円の中心が原点に止まっているとは限らないので、本当は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix}$$

と書くべきだが、簡単化のため、式 (\*17) で考えることにする。変形前の図形が半径  $r_0$  の円であるのに対し、変形後の図形はどうなるだろうか? そこで、変形前後の各状態における原点からの距離の 2 乗を

\* 弾性体と粘性流体の関係は、バネとダッシュポットの関係と同じである。バネの式的应用でダッシュポットが扱えるのと同じように、弾性体の応力の应用で粘性応力を考えればよい。

$$\text{変形前: } Q = X^2 + Y^2 \quad (*18)$$

$$\text{変形後: } q = x^2 + y^2 \quad (*19)$$

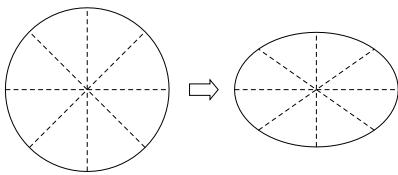
と表し、 $q$  を通じて変形の様子を探ってみよう。

● 一軸伸長または一軸圧縮

消しゴムを  $Y$  方向に伸長 ( $\alpha_{22} > 0$ ) または圧縮 ( $\alpha_{22} < 0$ ) し、 $X$  方向には変形しないように保ったとすると、 $a = 1 + \alpha_{22}$  として

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (*20)$$

となる。変形後の形は明らかに楕円で、その軸は  $X$  軸および  $Y$  軸に一致する。



このときの  $q$  は、式 (\*20) を式 (\*19) に代入して

$$q = X^2 + a^2 Y^2 \quad (*21)$$

という 2 次形式で与えられる。この  $q$  が最大または最小になる条件が、楕円の方角を示していて、今の場合、それは  $(\pm 1, 0)$  および  $(0, \pm 1)$  である。

● 単純剪断変形

式 (\*17) の  $\alpha_{ij}$  のうち、 $\alpha_{12}$  だけがゼロでない値  $\gamma$  をもち、他の成分はすべてゼロだとする:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + \gamma Y \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \quad (*22)$$

式 (\*22) を (\*19) に代入して  $q$  を求めよう。簡単化のため  $|\gamma| \ll 1$  として  $\gamma^2$  を無視する<sup>†</sup>。すると

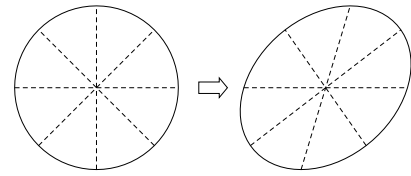
$$q = X^2 + 2\gamma XY + Y^2 = Q + 2\gamma XY \quad (*23)$$

となり、この  $q$  が最大または最小になる位置が分かれば楕円の方角が分かる。これは 2 次形式の主軸を求める問題であって、式 (\*23) を

$$q = Q + \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (*23')$$

と表し、ここに出てくる対称行列の固有ベクトルを求めればよい。固有ベクトルを求めると、 $q$  が最大または最小になるのは  $(1, 1)$  および  $(1, -1)$  方向であることが分かる (ただし、簡単化のため、規格化因子

は省略)。つまり、変形前には円だったものが、変形後には斜め 45 度の方角を軸とする楕円になる<sup>‡</sup>。伸長倍率は、それぞれの軸に対して  $1 \pm \gamma/2$  倍である。



練習問題 16

式 (\*22) から出発し、変形後の楕円の軸の方角が  $(1, \pm 1)$  となることを示す過程を、プリントや参考書を見ずに自力で再現せよ。

● 一般的な 2 次元変形

式 (\*17) に従う変形を一般的に考える。ただし  $\alpha$  は微小であるものとし、2 次の項を無視する。式 (\*23) と同様に  $q$  を計算すると

$$\begin{aligned} q &= Q + \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\alpha_{11} & \alpha_{12} + \alpha_{21} \\ \alpha_{21} + \alpha_{12} & 2\alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= Q + 2 \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} X_i X_j \end{aligned} \quad (*24)$$

と書ける。ただし

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \quad (*25)$$

と置いた。あとは式 (\*24) の 2 次形式を標準形にする問題であって、変形後の楕円の形についての情報は行列  $\varepsilon$  に含まれていることが分かる。

このように、円は一般に楕円になり、楕円の軸は式 (\*25) で定められる対称行列  $\varepsilon$  の固有ベクトルの方向を向く。式 (\*25) で定められる  $\varepsilon$  を歪みテンソル<sup>ひずみ</sup>という。また、対称行列であらわされるテンソル (ここでは  $\varepsilon$ ) に対し、その固有ベクトル  $\{b_i\}$  の方向にとった軸のことを主軸という。変形が式 (\*17) のように与えられたとき、式 (\*25) によって歪みテンソルを定め、その主軸および固有値を求めれば、楕円の軸の方角と伸長率を知ることができる。

おまけ

変形は、密度や体積 (2 次元なら面積) の変化を伴う場合も伴わない場合もある。まずは 2 次元で考えてみよう。主軸方向の伸長倍率は、 $\varepsilon$  の固有値  $\lambda'$  を用いて  $1 + \lambda'$  で与えられるので、

$$[\text{面積の倍率}] = (1 + \lambda'_1)(1 + \lambda'_2) = 1 + \lambda'_1 + \lambda'_2$$

<sup>‡</sup> 正確に言えば、 $(X, Y)$  座標系では 45 度方向であるが、 $(x, y)$  座標系ではそれから  $\gamma/2$  だけずれた方向になる。しかし  $\gamma$  は微小だから結果の差はわずかである。

<sup>†</sup> じつは  $\gamma$  が有限でも解析は可能だが、ここでは扱わない。

となる (ただし  $|\lambda'| \ll 1$  として 2 次の項を無視)。ここで、固有方程式  $\lambda'^2 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\lambda' + \det \varepsilon = 0$  における根と係数の関係より  $\lambda'_1 + \lambda'_2 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$  だから、 $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$  が分かれば面積の倍率が分かる。弾性変形による各点の変位を  $\xi = (x, y) - (X, Y)$  であらわし、これから  $\alpha_{ij}$  を求めて式 (\*25) に代入すると

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial X} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial Y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial X} + \frac{\partial \xi_1}{\partial Y} \right) & \frac{\partial \xi_2}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (*26)$$

となるので、変形による面積の変化について

$$[\text{面積の倍率}] = 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial X} + \frac{\partial \xi_2}{\partial Y} = 1 + \text{div } \xi \quad (*27)$$

という結論が得られる。

3 次元の場合でも本質的な結果は同じであり、球が変形して楕円体になること、体積の倍率が  $1 + \text{div } \xi$  であることが示される。すなわち、弾性体では

$\text{div } \xi > 0$ : 膨張

$\text{div } \xi < 0$ : 収縮 (圧縮)

$\text{div } \xi = 0$ : 体積変化なし。

### 流体の変形

弾性体では“変形前”と“変形後”にどんなに時間差があってもよいが、流体というものは昔の形をおぼえていないので、変形前後の時間差としては微小時間  $\Delta t$  を考えるべきである。つまり、弾性体における

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (*17')$$

の代わりに、流体では

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_t - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_{t-\Delta t} = \mathbf{v} \Delta t = \dots$$

という一瞬の差を考える。ある流体要素の近傍に着目し、場所による速度差を Taylor 展開の 1 次まで考慮すると

$$\mathbf{v} \Delta t = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \Delta t \quad (44.1')$$

と書ける。式 (44.1') の  $\mathbf{L}$  は、式 (\*16) で定義した速度勾配テンソルである。

簡単化のため、着目している領域の中心  $(x_0, y_0)$  は原点  $(0, 0)$  にあるものとしよう。この“原点”からの距離を

$$Q = (x^2 + y^2) \Big|_{t-\Delta t} \quad (*18')$$

$$q = (x^2 + y^2) \Big|_t \quad (*19')$$

として、これに、式 (44.1') から得られる

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_t = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \Delta t \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_{t-\Delta t}$$

を代入する。これから、弾性体での式 (\*24) に対応して

$$q = Q + 2\Delta t \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij} x_i x_j \quad (*28)$$

という式が得られる。ここで  $\dot{\varepsilon}$  は速度勾配テンソル  $\mathbf{L}$  の対称部分<sup>§</sup>であり、この  $\dot{\varepsilon}$  を歪み速度テンソルという。速度との関係を具体的に書くと

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (44.6')$$

となる。あとは歪み速度テンソルの固有値と固有ベクトルを求めれば、ある瞬間に円 (または球) だったものが、次の瞬間にどのように歪むかが分かる。

### 練習問題 17

単純剪断流 (\*14) の場合に  $q$  および  $\dot{\varepsilon}$  を求めると

$$q = Q + (\dot{\gamma} \Delta t) xy, \quad \dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

となることを示せ。さらに、これを用いて、単純剪断流での伸長方向が 45 度方向であることを示せ。

### 練習問題 18

次のそれぞれの例について、 $q$  と  $Q$  の関係を具体的に求め、ある瞬間に円だったものが次の瞬間にどの方向に引き伸ばされるかを計算せよ。ただし、 $a$  は適当な次元をもつ正の定数である。

(あ)  $(u, v) = (2ax + 3ay, -2ay)$

(い)  $(u, v) = (a(x + y), a(\frac{5}{3}x - y))$

(う)  $(u, v) = (a(x + \frac{1}{2}y), a(x - y))$

### 構成関係式

歪み速度テンソル  $\dot{\varepsilon}$  は、流れをあらわす速度ベクトル場から、流れによる変形の情報を抽出したものだと言える。この歪み速度テンソルを粘性応力テンソルに関係づける式 (構成関係式) が得られれば、最終的に Navier-Stokes 方程式 (40.1') が導出できる。

粘性応力は、歪み速度テンソルで示される楕円体への変形にちょうど逆らうように生じると考えられる。さらに、通常の流体では、構成関係式は式 (\*15) とつじつまが合うはずなので、単純剪断流の速度場 (\*14) を代入した場合には式 (\*15) と一致するようなものでなければならない。手がかりを見つけるため、式 (\*14) に対して歪み速度テンソルを 3 次元で計算してみると

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{したがって} \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\gamma}/2$$

となる。これと式 (\*15) を見比べると

$$\tau_{xy} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{xy} \quad (*29)$$

<sup>§</sup> テンソル  $\mathbf{L}$  とその転置を足して 2 で割る。

という関係が成り立っている。関係式 (\*29) は、単純剪断流という特定の流れに対して、しかも  $\tau$  の 9 個の成分のうち  $\tau_{xy}$  に限定して得られた式であるが、左辺と右辺の添字がうまく具合に一致していることから、一般に  $\tau$  のすべての成分に対して

$$\tau_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (*30)$$

と考えればうまく行きそうである。実際、詳しい考察により、式 (\*30) は、非圧縮 ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ) の粘性流体に対しては正しいことが示される (圧縮性のある場合は式 (\*37) のようになる)。式 (\*30) に式 (44.6') を代入し、

$$\tau_{ij} = \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (*31)$$

すなわち

$$\tau = \mu \begin{bmatrix} 2\partial_x v_x & \partial_x v_y + \partial_y v_x & \partial_x v_z + \partial_z v_x \\ \partial_y v_x + \partial_x v_y & 2\partial_y v_y & \partial_y v_z + \partial_z v_y \\ \partial_z v_x + \partial_x v_z & \partial_z v_y + \partial_y v_z & 2\partial_z v_z \end{bmatrix}$$

という結果を得る<sup>¶</sup>。これが非圧縮の粘性流体の構成関係式である。

#### 練習問題 19

例 (a)(i)(u) に対し、構成関係式 (\*31) を用いて粘性応力テンソルを計算し、正方行列の形で示せ。

最後に、式 (\*31) を、検査面を通じてはたらく粘性力の式 (\*13) に代入する。とりあえず  $x$  成分を考え、 $\mu$  は定数だとする

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_j \tau_{xj} &= \partial_x (2\mu \partial_x v_x) + \partial_y [\mu (\partial_x v_y + \partial_y v_x)] \\ &\quad + \partial_z [\mu (\partial_x v_z + \partial_z v_x)] \\ &= \mu (\partial_x^2 v_x + \partial_y \partial_x v_y + \partial_z \partial_x v_z) \\ &\quad + \mu (\partial_x^2 v_x + \partial_y^2 v_x + \partial_z^2 v_x) \\ &= \mu \partial_x \text{div } \mathbf{v} + \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) v_x \\ &= \mu \Delta v_x \end{aligned} \quad (*32)$$

を得る。さらに  $y$  成分や  $z$  成分についても同様に考えると、式 (40.1') の粘性項と一致する結果が得られる。

#### 練習問題 20

プリントを見ずに、自力で式 (\*32) の計算過程を再現し、式 (40.1') の粘性項が得られることを示せ。

<sup>¶</sup> 演算子を含む式なので、左右を入れ替えてよいものと入れ替えてはいけないうものがあることに注意して計算すること。たとえば  $\partial_y \partial_x v_x = \partial_x \partial_y v_x$  は良いが、 $\partial_x v_x$  を  $v_x \partial_x$  とするのはダメ。

#### おまけ

非圧縮とは限らない場合について、粘性流体の構成関係式を求めてみよう。この場合にも、弾性体の構成関係式が参考になる。弾性体の応力については次のことが言える：

- 楕円体を球に戻す方向に作用する。
- 体積変化に対しては等方的な復元力を生じる。
- Hooke の法則に従う (応力は歪みに比例<sup>||</sup>)。

形の変化と体積変化を別々に考えるため、歪みテンソル  $\varepsilon$  を

$$\varepsilon_{ij} = \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\text{div } \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} (\text{div } \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} \quad (*33)$$

のように 2 つの部分に分ける。第 1 項の固有値を計算すると、それぞれの主軸方向への伸長倍率が

$$1 + \lambda'_1 - \frac{1}{3} \text{div } \boldsymbol{\xi}, \quad 1 + \lambda'_2 - \frac{1}{3} \text{div } \boldsymbol{\xi}, \quad 1 + \lambda'_3 - \frac{1}{3} \text{div } \boldsymbol{\xi}$$

のように求められ、これから体積の倍率を計算すると 1 倍 (変化なし) となる。つまり、式 (\*33) の第 1 項は、体積変化なしで形だけが変るような変化を示している。他方、式 (\*33) の第 2 項では、すべての方向に対して伸長倍率が  $1 + (\text{div } \boldsymbol{\xi})/3$  倍となり、等方的な膨張または圧縮を示している。

弾性体の応力テンソルを  $\sigma_{ij}$  としよう。弾性体の微小変形に対する運動方程式および構成関係式は、

$$\rho \partial_t^2 \xi_i = (\text{外力}) + \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \quad (*34)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\text{div } \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} \right) + K (\text{div } \boldsymbol{\xi}) \delta_{ij} \quad (*35)$$

で与えられる。すなわち、応力テンソル  $\sigma$  は、式 (\*33) の第 1 項と第 2 項の線形結合で与えられる。

粘性流体の場合には、歪み速度テンソル  $\dot{\varepsilon}$  を、

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left( \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (*36)$$

のように 2 つに分ける。第 1 項は形の変化、第 2 項は体積変化を示す。これらの項の線形結合により、粘性応力テンソルは

$$\tau_{ij} = 2\mu \left( \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} \right) + \mu' (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (*37)$$

という式で与えられる。係数  $\mu$  は粘性率 (粘性係数)、 $\mu'$  は体積粘性率と呼ばれる。式 (\*37) に式 (44.6') を代入すると

$$\tau_{ij} = \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \left( \mu' - \frac{2}{3} \mu \right) (\text{div } \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (*37')$$

となり、これが圧縮性のある場合まで含めた粘性流体の構成関係式である。特に非圧縮流体の場合は、式 (40.2) を代入すると、式 (\*31) に帰着することが確認できる。

<sup>||</sup> 比例というのは、決して  $\tau$  が  $\varepsilon$  のスカラー倍になるという意味ではない。ところが某大学では、これを理解できない教授が、新理論と称して、間違った Hooke の法則を堂々と教えているらしい。「Hooke Stokes 新たな支配方程式」で検索をかけてみよう。