流体力学 II 補足資料その２（2013 年度版）

2013-07-29 大信田（応用数理）

期末試験（8/2）にそなえて講義ノート等を見直す際に注意してほしいポイントや、講義でゆっくり説明できなかった事項をまとめた。ただし、このプリントだけ勉強すれば完璧だというわけではない（ほかにも復習しておくべきものはある）。
そのほか、中間試験にはおそらく出ないけれども、あとで（他の講義とか卒業研究とか就職してからの仕事などで）役に立つのではないかと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておこう。
この資料は、流体力学 II のホームページ (`http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/fluid/`) からもダウンロードできるようにする予定である。

まずは基礎知識を確認

何も見ないで以下のものを書いてみよう。ただし、簡単化のため、密度一定の非圧縮流体に限定する。

- 連続の式
  [書けなかった場合 → 教科書の式 (3.4)]
- Navier–Stokes 方程式 （太字ベクトル表記）
  [書けなかった場合 → 補足資料その１（6/4）]
- Navier–Stokes 方程式 （3 次元で成分表示）
  [書けなかった場合 → 講義ノート]
- Reynolds 数
  [書けなかった場合 → 教科書の式 (40.6), (45.8)]
- 水の動粘性係数（単位も含めて）
  [書けなかった場合 → 教科書 p.186]

Navier–Stokes 方程式は、無理に丸暗記するようなものではなく、各項の意味を考えながら実際に使っているうちに自然に覚えてしまうというのが正しい。流体力学 I の講義ノートや、補足資料その１などを見て、それぞれの項が何をあらわしているのかを確認しておこう。

練習問題 1

流体の運動量に関する balance law **を考えると**

$$\partial_t(\rho v_i) + \sum_j \partial_j(\rho v_i v_j) = F_i^{(\mathrm{ex})} - \partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{ij}$$

という式が得られる。各項の意味を説明せよ。さらに、 $\tau_{ij} = \mu\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right)$ **を代入して整理すると**

$$\rho\left(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ex})} - \nabla p + \mu\triangle\mathbf{v} \qquad (*1)$$

となることを示せ（途中の計算も含めて）。

また、そもそも演算子についてよく分かっていない人がいるので、これもきちんと復習し確認しておくこと。

練習問題 2

$\nabla\cdot\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}\cdot\nabla$ の違いについて説明せよ。また、 $\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ **と** $\dfrac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}$ **の違いについて説明せよ。**

練習問題 3

外力として重力のみを受ける非圧縮粘性流体の場合、Navier–Stokes **方程式は（連続の式も含めて）**

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} \qquad (*2)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \qquad (*3)$$

のように書ける。座標系を 2 次元デカルト座標系とし、 $\mathbf{g} = (g\sin\theta,\ -g\cos\theta)$ **として、式** $(*2)(*3)$ **を成分表示で書き下せ。**

練習問題 4

身の回りで生じる適当な流れを例にとり、流れの代表長さ L **および流速** U **をおおざっぱに見積もって、**Reynolds **数を概算せよ。**

さらに、矢印をたくさん描いて流れ場を図示する方法についても押さえておきたい。位置ベクトルと速度ベクトルはベクトルとしての種類が全く違う。位置ベクトルの成分は、いわゆる座標軸が基準となるが、速度ベクトルは座標軸とは直接関係せず、微小要素にそった単位ベクトルを基底として表示される。したがって、そもそも原点が異なるし、図示するときは目盛りの尺度も別々にするのが普通である。

練習問題 5

位置 $y = \pm a$ に壁があって、あいだの空間を流体が満たしている。この流体の速度ベクトル場が

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(y+a)/(2a) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*4)$$

のように与えられるとして（U も a も正の定数）、この流れの様子を (x, y) 平面上に図示せよ。

粘着条件と境界層

続いて式 $(*1)$ とともに用いるべき境界条件について考える。実験事実によると、粘性流体が物体（固体壁）に接しているところでは、物体に対する流体の相対速度はゼロでなければならない（これを**粘着条件**とか**すべりなし条件**とか言う）。特に、物体が静止している場合、壁面上での流体の速度はゼロになる。

たとえば $y = \pm a$ の壁の間を流体が満たしていて、下の壁（$y = -a$）が静止し、上の壁（$y = +a$）が x 方向に速度 U で動いていたとする。粘着条件により、$y = a$ での流体の速度は、上の壁と同じ速度 $(U, 0)$ である。他方、下の壁でも粘着条件が成り立つので、$y = -a$ での速度はゼロでなければならない。これらの両方の条件を満たすように Navier–Stokes 方程式の定常解を求めると、長時間経過後の速度場は式 $(*4)$ のようになることが分かる。決して流体全体が速度 $(U, 0)$ で動くわけではない。

また、粘着条件は、壁の材質が何であるかには全く関係ないことに注意しよう。固体面をテフロンにしようが紙ヤスリにしようが、それが平らな剛体壁面である限り、流れには全く違いは生じない。

完全流体の理論との関係

粘着条件は、流体力学 I で扱ったような完全流体の理論とは両立しない。完全流体では Lagrange の渦定理が成立し（教科書 p.44）、もし渦度が最初にゼロなら、いつまでもゼロである。渦度というのは、6/28 の講義で説明したように、流体要素の自転を示す量であって、2 次元の場合に式で書くと

$$\omega = \partial_x v - \partial_y u \qquad (*5)$$

のようになる。渦定理が成立する場合には、過去に自転していなかった流体要素が自転を始めることはなく、自転していた流体要素が自転を止めることもない。この渦定理のために、たとえば物体を一様流のなかに置いてできる流れは、渦度がゼロの**ポテンシャル流れ**

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi = (\partial_x \phi,\ \partial_y \phi) \qquad (*6)$$

になる。このような完全流体の理論を用いて物体まわりの流れを求める場合、教科書 §6 のような境界条件を適用する。特に、物体が静止している場合、流体は式 (6.2) を満たすように “物体表面” にそって流れることになる。つまり、得られた解は粘着条件を満たさない。

これは、本当は教科書の図 40.4 のようになっていると考えられる（多少誇張して描いてある）。領域 I では完全流体の理論が適用されるが、物体近傍には、大きな速度勾配をもつ領域 II が存在し、ここでは粘性項が無視できない。流れの Reynolds 数が大きい場合、領域 II は物体の寸法に比べて厚さが無視できるような薄い層状の領域になり、**境界層**と呼ばれる。完全流体での境界条件の式 (6.2) にとっての “物体表面” とは、じつは領域 II のすぐ外側のことである。領域 II が物体に接するところでは粘着条件が成立している。

物体の形によっては、図 40.5 のような状況が発生する。この場合、領域 I にとっての “物体” は、もとの物体とは異なる形になってしまう。このように、Reynolds 数が大きい場合の流れは、非常に難しい問題を含んでいる。

おまけ

図 40.6 は、層流と乱流についての Reynolds の有名な実験を示している。この実験は Reynolds 数という相似パラメータが初めて登場した伝説的実験なので、流体力学の常識として知っておいてほしい。もっとも Reynolds の結果を定量的に再現しようとすると理論的にも実験的にも難しい問題に直面する。その意味でも伝説的な実験である。

渦度の拡散

コップに水を入れ、完全に静止するまで待ち、そっと 1 円玉を浮かべる。このとき水の渦度はゼロであり、1 円玉も回転していない。続いて、水を揺らさないように注意しながら、コップを中心軸まわりに回転させる。1 円玉はどうなるだろうか。

実験結果を思い出してみよう。回転を始めた直後には、1 円玉はそのまま静止していた。これは「最初に渦度がゼロなら時間がたっても渦度はゼロ」という、Lagrange の渦定理の現れである*。他方、時間がたつと、壁（コップ）の運動によって系の境界に与えられた渦度が粘性によって拡散し、流体全体が回転するようになる。壁のところで粘着条件が重要な役割を果たしていることに注意しよう。もし粘着条件がなければ、コップをいくら回そうが、なかの水は全く回転しないはずである。

最初に渦度が距離ゼロの範囲に存在していたのが、時間 t のあいだに粘性で拡散したとすると、渦度の拡散が及ぶ代表長さは、

$$\lambda \propto \sqrt{\nu t} \qquad (46.13')$$

のように経過時間の平方根に比例することが分かっている（導出については 7/5 の講義ノート、あるいはこの資料の後半を見よ）。別の言い方をすると、渦度の広がりの大きさが 0 から距離 λ まで達するのに要する時間は

$$t \sim \lambda^2/\nu \qquad (*7)$$

で与えられる。記号 $A \sim B$ は、ここでは「係数を無視すれば A と B の大きさがほぼ等しい」という意味で用いている（たとえば $1-\cos\theta \sim \theta^2$）。

練習問題 6

渦度の拡散が及ぶ長さは、動粘性係数 ν と経過時間 t で表せると分かった時点で

$$\lambda \sim \nu^a t^b$$

と推測できる。次元の合う組み合わせは式 $(46.13')$ つまり $a = b = 1/2$ に限られることを示せ。

境界層の厚さ

教科書の図 46.3 のように、平らな板が流れに平行に置かれているとする。粘着条件がなければ板は流れに何の影響も与えないはずだが、実験によると確かに粘着条件が成立し、板にそって境界層ができる。境界層は、下流に進むにつれて少しずつ厚くなる。厚さが増える機構は渦度の拡散である。渦度の拡散が純粋に粘性によるものだとすれば、位置 x での境界層の厚さについて、式 $(46.13')$ に似た関係式が成り立つはずである。ただし、経過時間 t の代わりに、流体が板の影響を受けはじめてから位置 x に来るまでにかかった時間、すなわち x/U をとる。これにより、位置 x での境界層の厚さ δ_{B} を求めると

$$\delta_{\mathrm{B}} \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad (*8)$$

となる。

板の全長を L としよう。式 $(*8)$ によると、境界層の厚さの最大値は

$$\max \delta_{\mathrm{B}} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L\sqrt{\frac{\nu}{UL}}$$

のように見積もられる。ここで、**Reynolds 数**が

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \qquad (*9)$$

であることを思い出すと、境界層の厚さは

$$\max \delta_{\mathrm{B}} \sim \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad (*8')$$

と書ける。式 $(*8')$ から、Reynolds 数が大きい流れでは、L に比べて相対的に境界層は薄いことが分かる。

練習問題 7

風速 $U = 1.5\,\mathrm{m/s}$ の気流のなかに、長さ $L = 10\,\mathrm{cm}$ の板が流れに平行に置かれているとする。この場合の Reynolds 数を求めよ。さらに、式 $(*8')$ が適用できるものとして、境界層の厚さを概算せよ。

おまけ

式 $(*8)$ は層流境界層に対する式である。Reynolds 数があまりにも大きくなると（たとえば 10 万とか 100 万とか）、境界層が乱流化し、式 $(*8)$ は適用できなくなる。また、物体の形状やその他の条件によっては、そもそも流体が物体にそって流れることが困難となり、境界層が途中で剥離する場合がある（教科書の図 48.2 を見よ）。こういう場合も、当然、式 $(*8)$ の適用範囲外となる。

* 突き詰めれば「慣性の法則」の現れだとも言える。

ベクトル解析

最も基本的な微分の定義式である

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (*10)$$

に戻り、その “分母を払って” 得られる

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\Delta x \qquad (\Delta x \to 0) \qquad (*11)$$

という式を出発点として、ベクトル解析の基礎事項について確認しておこう。

勾配とナブラ演算子

式 (∗11) を拡張して、変数 x を位置ベクトル $\mathbf{r}$ で置き換えた式を考える。位置の差である Δx は $\Delta\mathbf{r}$ におきかわり、内積のドットを用いて

$$f(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = (\mathrm{grad}\, f)\cdot\Delta\mathbf{r} \qquad (*12)$$

と書ける（もちろん $\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}$）。右辺は $\Delta\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\, f$ と書いても良い。または、同じことだが、近接した 2 点 A および B を考え、$\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\Delta\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると、

$$f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{grad}\, f \qquad (*12')$$

とも書ける。こうして定められる $\mathrm{grad}\, f$ を「f の**勾配**(gradient)」という。式 (∗12) を、偏微分の基本な関係式である

$$f(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

と見比べることにより、

$$\mathrm{grad}\, f = \begin{bmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{bmatrix} \qquad (*13)$$

を得る（もちろん ∂_x は $\partial/\partial x$ の略記）。勾配の式 (∗13) は、**ナブラ演算子**

$$\boxed{\nabla = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y + \mathbf{e}_z\partial_z} \qquad (*14)$$

を用いると

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f, \quad f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\nabla f \qquad (*15)$$

のように書ける。

なお、演算子を含む式では何が何に作用しているかが大事なので、順番に注意しよう。演算子は、自分より右にあるものに対して作用する。この関係を崩してしまう危険性があるときは、うかつに並べかえてはいけない。たとえば $\mathbf{e}_x\partial_x$ の ∂_x は後ろに書くべきである。

練習問題 8

$\nabla(pq)$ と $p\nabla q$ の差を計算せよ。（ヒント: ∇ のなかの ∂_x や ∂_y が p にも作用するかどうかに注意）

ベクトル場の微分

あるベクトル場 $\mathbf{v}$ が与えられているものとしよう。ナブラ演算子 ∇ を用いると、ベクトル場 $\mathbf{v}$ の**発散**（divergence）および**回転**（rotation）は

$$\text{発散：}\quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} \qquad (*16)$$
$$\text{回転：}\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} \qquad (*17)$$

と書ける。

発散は、もともと **balance law** を書き表すためのもので、検査面に囲まれる体積を ΔV として

$$\int_{\text{検査面}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = (\mathrm{div}\,\mathbf{v})\,\Delta V \qquad (\Delta V\to 0) \qquad (*18)$$

によって定義される。式 (∗18) も式 (∗12′) と同じく、式 (∗11) の拡張のひとつであって、ただし式 (∗12′) の左辺が線分 AB の端点であるのに対し、式 (∗18) では 3 次元の領域を囲む検査面を考えているところが異なる。

速度場の回転（$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$）は**渦度**をあらわす。3 次元の速度場 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ に対し、渦度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\\ &= (\partial_y w - \partial_z v,\ \partial_z u - \partial_x w,\ \partial_x v - \partial_y u)\end{aligned} \qquad (*19)$$

という 3 成分の量になる（3 次元空間には 3 つの回転軸があるため）。2 次元の場合は、式 (∗19) で w および ∂_z をゼロとすると

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ \partial_x v - \partial_y u) \qquad (*5')$$

となり、第 3 成分（xy 面での回転）に着目すると式 (∗5) と一致する。式 (∗11) に相当する式は、循環

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \qquad (*20)$$

と渦度の関係式になる。積分路 C として、xy 平面上の微小な面 ΔS の周を取ると、

$$\int_C \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial_x v - \partial_y u)\Delta S \quad \text{すなわち} \quad \Gamma = \omega\Delta S$$

となる。面が微小とは限らない場合や 3 次元の積分路の場合は、教科書の式 (16.3) のようになる。

勾配は、スカラー場 f に対しては式 (∗15) で与えられ、結果はベクトル場になる。ベクトル場 $\mathbf{v}$ に対しても勾配 $\operatorname{grad}\mathbf{v}$ を求めることは可能だが、その結果は、ベクトルでもスカラーでもなく、2 階テンソルになる。

Laplace 演算子（Laplacian）は ∇^2 または $\triangle$ によってあらわされ、スカラー場に対しては

$$\triangle f = \nabla^2 f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f \qquad (*21)$$

で与えられる。デカルト座標でのナブラ演算子の式 (∗14) を用いて計算すると

$$\triangle f = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) f \qquad (*22)$$

となることが分かる。

おまけ

ベクトル場に対しても、式 (∗21) をそのまま用いることは一応可能だが、その場合、

$$\triangle\mathbf{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathbf{v})$$

のように、計算の途中で 2 階テンソル $\operatorname{grad}\mathbf{v}$ を経由することになる。これはデカルト座標以外の座標系では面倒なことになるので、それを避けるため、ベクトル場の Laplacian をデカルト座標以外の座標系で計算するときは

$$\begin{aligned}\triangle\mathbf{v} &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}\\ &= -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})\end{aligned}$$

という公式を利用するほうがよい。特に、もし $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ であることがあらかじめ分かっているなら、計算するのは第 1 項だけでよいことになる。

Navier–Stokes 方程式の解

Euler 方程式や Navier–Stokes 方程式は、速度 $\mathbf{v}$ について 2 次の項を含む、非線形の偏微分方程式である。そのため、一般解を求めることはほとんど不可能だと考えられる。しかし、何らかの制約条件の枠内であれば*、解を求めることは可能である。

ポテンシャル流れ

まずは流体力学 I で扱った**ポテンシャル流れ**の場合、すなわち「速度が式 (∗6) で表せる」という制約を課した場合について考察しよう。この場合、連続の式は

$$\triangle\phi = 0 \quad \text{すなわち} \quad \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi = 0 \qquad (*23)$$

となる。これを用いて Navier–Stokes 方程式の粘性項を計算すると、

$$\begin{aligned}\mu\triangle u &= \mu\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)\partial_x\phi = \mu\partial_x\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)\phi = 0\\ \mu\triangle v &= \mu\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)\partial_y\phi = \mu\partial_y\left(\partial_x^2+\partial_y^2\right)\phi = 0\end{aligned}$$

のように消えてしまう†。ほかの項を計算し、p が未知数であることに注意して式を整理すると、

$$p = p_0 - \rho\left\{\partial_t\phi + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_y\phi)^2\right\} \qquad (*24)$$

とすれば Navier–Stokes 方程式の等号が成立することが分かる（p_0 は定数）。

練習問題 9

式 (∗6)(∗24) を Navier–Stokes 方程式に代入し、たしかに左辺と右辺が等しくなることを確認せよ。

これで解が求められて万事解決であるような気がするが、ひとつ大きな問題が残っている。それは、式 (∗6) が境界条件を満たすかどうかである。実験で見たとおり、粘性流体の速度場は境界上で粘着条件を満たさなければならない。残念なことに、式 (∗6) で与えられるポテンシャル流れは、ほとんどの場合に、粘着条件と矛盾してしまい、意味のある解が得られない。したがって、Navier–Stokes 方程式の解を求めるためには、別の手を考える必要がある。

---

* Euler 方程式の場合は「ポテンシャル流れ」（非回転流れ）という制約条件を課すことで、さまざまな解を求めることができた。残念ながら、Navier–Stokes 方程式で同じことをしようとすると、粘着条件と矛盾してしまい、意味のある解が得られない。したがって別の手を考える必要がある。

† したがって最初から $\mu = 0$ として Euler 方程式で考えよう、というのが流体力学 I の内容である。ただし、この場合、粘着条件を課すと矛盾が生じるので、条件をゆるめて式 (6.2) のようにする。粘着条件とのつじつまを合わせる役割は**境界層**が担うことになる。

平行流

もっとも基本的な場合として、

速度ベクトルが常にある方向に平行である

という制約条件を課した場合を考える。このような制約条件を満たす流れのことを**平行流**とか**一方向流れ**とかいう（教科書 §46 を見よ）。

練習問題 10

Navier–Stokes 方程式 (∗1) で外力がゼロの場合を考える。速度がつねに z 方向に平行であるという条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか? ただし流れは必ずしも定常ではないものとする。
方針: まずは速度ベクトルを $\mathbf{v} = (u, v, w)$ として、式 (∗1) および連続の式を具体的に成分表示で書き下す。次に、u や v はゼロなので、それらを含む項をすべて消す。すると連続の式から $\partial_z w = 0$ となるので、これを用いてさらに項を消す。最終的には、圧力の式と速度の式に分離できる形になる。

練習問題 11

重力項を含む Navier–Stokes 方程式 (∗2) において、流れは定常であるものとし、さらに速度が常に x 軸に平行であるという制約条件を課すと、方程式はどれだけ簡単化されるか?

平行流において、Navier–Stokes 方程式は大幅に簡単化される。非定常の場合の方程式は、実質的に熱伝導方程式（あるいは拡散方程式）と同じものになり、したがって偏微分方程式の教科書に載っている解法（固有関数展開など）で解ける。定常の場合には方程式はさらに簡単になり、最も単純な場合には線形 2 階 ODE に帰着する。

さて微分方程式を解いて速度を求めるには、境界条件を具体的に知る必要がある。

- 壁がある場合には、**粘着条件**により、壁に対する流体の相対速度はゼロになる。もう少し詳しく言うと、壁が静止している場合は壁際での流体の速度はゼロとなり、壁が速度 U で動いている場合は流体もそれと同じ速度で動く。
- **自由表面**においては、流体の法線応力が外界の圧力（大気圧）とつりあい、接線応力は（つりあう相手がゼロなので）ゼロとなる。

たとえば、速度を $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ とし、また、考えている境界面は y 軸に直交する（つまり $y = \text{const.}$ の形で書ける）ものとする。このとき、速度 u に対する境界条件は、次のようにまとめられる[‡]:

静止した壁：	$u\|_{\text{境界}} = 0$
速度 U で動く壁：	$u\|_{\text{境界}} = U$
自由表面：	$\partial_y u\|_{\text{境界}} = 0$

もちろん、たとえば速度場が $\mathbf{v} = (0, 0, w)$ で、自由表面の位置が $y = \text{const.}$ でなく $x = \text{const.}$ だったら、境界条件は $\partial_x w|_{\text{境界}} = 0$ のように読み替える。

速度場を図示するには、一般には矢印をたくさん描いたり、**流線**を示したりする必要がある。しかし、一方向流では、必ずしもベクトル場全体を図示する必要はない。たとえば $u = u(x)$ の場合は x に対する u の分布（**速度プロファイル**）を図示すれば足りる。

練習問題 12

角度 θ だけ傾斜した斜面上の流れを、式 (∗2) に従う平行流 $\mathbf{v} = (u, 0)$ として求め、速度プロファイルを図示せよ。ただし、斜面の位置を $y = 0$, 自由表面の位置を $y = H$ とする（つまり $\partial_y u|_{y=H} = 0$）。

練習問題 13

位置 $x = \pm L/2$ に、静止した垂直な壁があり、そのあいだを粘性流体が満たしていて、重力にしたがって $+y$ 方向に流れている（速度を $\mathbf{v} = (0, v, 0)$ とする）。$y = y_{\text{min}}$ での圧力と $y = y_{\text{max}}$ での圧力は、どちらも大気圧 p_{atm} に等しく、また流れは定常であるものとして、v を x の関数として求め、図示せよ。

[‡] 平行流という限定条件がついていることに注意。この限定条件がない場合は、もう少し複雑なことを考えなければならない。特に、自由表面境界条件は、表面の法線ベクトルと粘性応力テンソルを用いて書く必要があるし、表面が曲がっているなら表面張力も考えることになる。

練習問題 14

$y = 0$ および $y = H$ に静止した平面壁があり、そのあいだを粘性流体が占めていて、圧力勾配によって駆動されている。上流側 $x = x_{\min}$ での圧力を p_{H} とし、下流側 $x = x_{\max}$ での圧力を $p_{\mathrm{L}}\,(< p_{\mathrm{H}})$ として、このときの速度場を求めて図示せよ。ただし重力の影響はなく、また流れは定常であるものとする。

練習問題 15

$z = 0$ に静止した壁があり、また $z = H$ には別の壁があって x 方向に速度 U で動いている。さらに、$x = \pm L$ には静止した壁があり、これら 4 つの壁にはさまれた長方形領域に粘性流体が閉じ込められて循環している。この循環流は定常であり、y 方向の非一様性や重力の効果は無視できるものとする。
ここで $L \gg H$ とすると、この細長い領域の両端付近を除けば、流れは一方向流れと見なすことができる。このときの速度プロファイルを求めて図示せよ。さらに、領域の両端の圧力差を求めよ。

もちろん、一方向流れという制約条件を課すのは人間の勝手だが、それが実際に安定な流れとして実現するかどうかは Reynolds 数などの条件による。人間の都合としては、壁があれば壁にそって流れると期待したくなるが、実際の流体の流れは、そのとおりになることもあれば、そうならない場合もある、ということである。実際の流れには、つねに微小撹乱が加わっていて、この撹乱が成長するような条件ではもともとの一方向流れは不安定となり、別の流れに変化する。非常におおまかなことを言うと、たいていの場合、Reynolds 数が大きくなるにつれて流れは不安定となり、（途中経過は場合によっていろいろだが）最終的には**乱流**に移行する。教科書の p.161 あたりを確認しておいてほしい。

Hagen–Poiseuille 流れ

平行流の中でも実用的に重要なのが、**Hagen–Poiseuille 流れ**、すなわち円管をとおる平行流である。講義では直接扱っていないが、重要な例だし、習ったことを組み合わせればできるので、ここにまとめておく。

半径 a の円管があるとし、その中心軸にそって x 軸をとる。速度場は $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ のように x 軸に平行であると仮定して Navier–Stokes 方程式に代入する。さらに流れが定常だとすると、Navier–Stokes 方程式は

$$\mu\left(\partial_y^2 + \partial_z^2\right) u = \partial_x p \qquad (*25)$$

$$\partial_x u = 0 \qquad (*26)$$

$$(\partial_y p, \partial_z p) = (0, 0) \qquad (*27)$$

のように簡単化される。式 (*25) の左辺は x によらず、右辺は y にも z にもによらないから、式 (*25) の両辺とも定数でなければならず、したがって p は x の（たかだか）1 次関数であることが分かる。

こうして、圧力勾配 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ は定数であることが分かったので、2 点での p の値が分かれば圧力勾配が求められる。円管の長さを L とし、入口での圧力を p_{H}, 出口での圧力を p_{L} とすると、圧力勾配が

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{p_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{L}}}{L}$$

と定まり、式 (*25) に代入すると

$$\left(\partial_y^2 + \partial_z^2\right) u = -\frac{p_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{L}}}{\mu L} \qquad (46.6)$$

という方程式が得られる。これを、境界条件

$$u|_{\text{壁}} = u|_{y^2+z^2=a^2} = 0 \qquad (*28)$$

のもとで解けばよい。

対称性から考えて

$$u = u(r), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \qquad (*29)$$

となっているはずである。このときの $\left(\partial_y^2 + \partial_z^2\right) u$ を計算しよう。変数のつながりが $(y, z) \mapsto r \mapsto u$ となっていることに注意すると

$$\partial_y u = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{y}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

であり、したがって

$$\begin{aligned}
\partial_y^2 u &= \partial_y \left\{ y\,\frac{u'(r)}{r} \right\} \\
&= \frac{u'(r)}{r} + y\,\partial_y \left\{ \frac{u'(r)}{r} \right\} \\
&= \frac{u'(r)}{r} + y\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left\{ \frac{u'(r)}{r} \right\} \\
&= \frac{u'(r)}{r} + \frac{y^2}{r} \left\{ \frac{u''(r)}{r} - \frac{u'(r)}{r^2} \right\}
\end{aligned}$$

である（途中で積の微分を用いていること、また演算子とその相手の順番を崩さないことに注意しよう）。同様に $\partial_z^2 u$ を求め、上記の結果と足して整理すると

$$\left(\partial_y^2 + \partial_z^2\right) u = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + r^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \qquad (*30)$$

という式が得られる。これを用いて、解くべき方程式 (46.6) の左辺を書き換えると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + r^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_\mathrm{H} - p_\mathrm{L}}{\mu L} \qquad (*31)$$

という 2 階の ODE になる。これを解けば速度 u が r の関数として求められるはずである。境界条件は

$$u|_{r=a} = 0 \qquad (*28')$$

となる。

練習問題 16

式 (∗31) の一般解が

$$u = A\log r + B - \frac{p_\mathrm{H} - p_\mathrm{L}}{4\mu L} r^2 \qquad (*32)$$

となることを示せ。次に境界条件 (∗28) を課し、また領域内部で u が発散することはないという条件を課すことにより、係数 A, B を決定し、u を求めて図示せよ（教科書の図 46.1 のようになるはず）。

円管をとおる流量を

$$Q = \int_{\text{円管断面}} u\,\mathrm{d}S = \int_0^a u\cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

とする。流れが平行流と見なせる場合、式 (∗31) の解を用いて Q を計算することができて、結果は

$$Q = \frac{p_\mathrm{H} - p_\mathrm{L}}{L} \times \frac{\pi a^4}{8\mu} \qquad (46.8)$$

となる（**Hagen–Poiseuille の法則**）。式 (46.8) を応用し、毛細管を用いた実験により流体の粘性を測定することができる[§]。

練習問題 17

式 (46.8) を導出せよ。また、左辺と右辺の次元が合っていることを確認せよ。

[§] 鳥取大学の物理学実験の教科書を見よ。

急に動き出した平板によって引きずられる流れ

コップを急に回す実験のことを思い出そう。最初のうちは中の水は全く回らないが、時間がたつと全体が剛体回転するのだった。

本来はこれは円筒座標を用いて考えるべき問題なのだけれど、簡単化のため、壁の近傍にのみ着目し、

- 壁は平らな板である（曲がっていない）
- 反対側の壁は無限に遠い

という問題に置き換えて考えよう。壁が $y = 0$ にあり、流体が $0 < y < +\infty$ の領域を満たしているとする。最初は平板も流体も静止していたが、時刻 $t = 0$ において、平板が $+x$ 方向に一定速度 U で動き出したとして、このとき流体中に生じる流れはどうなるか？という問題である。

速度は x 軸に平行だと仮定し、さらに圧力勾配はないものとして、Navier–Stokes 方程式を簡単化する。ただし非定常の場合を考えるので時間微分の項を残す。すると、Navier–Stokes 方程式は

$$\partial_t u = \nu \partial_y^2 u \qquad (46.10)$$

のようになる。これを

$$\text{初期条件}\quad u|_{t=0} = 0 \qquad (*33)$$
$$\text{境界条件}\quad u|_{y=0} = U \qquad (*34)$$

のもとで解けばよい。

偏微分方程式 (46.10) を常微分方程式に直すために、**相似変数の方法**という技を使う。これは、時間がたっても解が相似である（異なる時刻の解を適当に拡大縮小すれば互いに一致する）と仮定し、

$$u = Uf(s), \quad s = \frac{y}{\lambda(t)} \qquad (*35)$$

と置く、というものである。もちろんこれで本当にうまくいくかどうかは、実際に解いてみないと分からない。

ともかく試してみよう。変数のつながり

$$(t, y) \mapsto s \mapsto f \mapsto u$$

に注意しながら偏微分を計算すると

$$\partial_t u = U\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = -U\frac{\lambda'(t)}{\{\lambda(t)\}^2}yf'(s)$$
$$\partial_y u = U\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{U}{\lambda(t)}f'(s)$$
$$\partial_y^2 u = \partial_y\left\{\frac{U}{\lambda(t)}f'(s)\right\} = \cdots = \frac{U}{\{\lambda(t)\}^2}f''(s)$$

のようになり、これを式 (46.10) に代入して整理すると

$$\frac{\lambda(t)\lambda'(t)}{\nu} = -\frac{f''(s)}{sf'(s)} \qquad (*36)$$

となる。じつは式 (∗35) のように置いた時点で、s, t, y という 3 つの変数が登場しているので、もし、式 (46.10) に代入してこの 3 つの変数が入り混じった式が出てきたら、手が付けられなくなる危険性もあった。しかし幸いなことに、式 (∗36) はそんなひどい式にはなっていない。左辺にあるのは t だけで、s も y もない。また、右辺は t も y も直接には含んでおらず、s だけの式になっている。したがって、両辺とも定数であるに違いない。そこで、分離定数を α として

$$\lambda(t)\lambda'(t) = \alpha\nu \qquad (*37)$$
$$f''(s) = -\alpha s f'(s) \qquad (*38)$$

のように方程式を分離する。すると、どちらも常微分方程式となり、簡単に解けることが期待される。

まずは方程式 (∗37) を解く。初期条件 (∗33) を考えると $\lambda|_{t=0} = 0$ だから、これを満たす解を求めると

$$\lambda = \sqrt{2\alpha\nu t} \qquad (*39)$$

となる。この時点で式 (46.13′) が示されたことになる。

次に方程式 (∗38) の解を求めよう。定数係数ではないので解を exp と推測する方法は使えない。2 階の ODE なので変数分離法もそのままでは使えないが、

$$g(s) = f'(s)$$

と置き直して 1 階化すると変数分離法が使えるようになる。解は、A, B を任意定数として

$$f = \int g\mathrm{d}s = A\int_0^s \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tilde{s}^2\right)\mathrm{d}\tilde{s} + B \qquad (*40)$$

のように求められる。

あとは、条件 (∗33)(∗34) を満たすように定数を定めればよい。これらの条件を f の境界条件に読み替えると

$$f|_{s=0} = 1, \quad f|_{s=+\infty} = 0$$

となるので、これを満たすように A, B を求めると

$$A = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}, \quad B = 1 \qquad (*41)$$

となる。これらの定数を代入して式 (∗39) を書き直し、さらに $\sqrt{\alpha/2}\,s = \eta$, $\sqrt{\alpha/2}\,\tilde{s} = \tilde{\eta}$ と変数変換すると

$$f = 1 - \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\int_0^s \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tilde{s}^2\right)\mathrm{d}\tilde{s}$$
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\tilde{\eta}^2}\mathrm{d}\tilde{\eta} = 1 - \operatorname{erf}\eta$$

となって、結果は α を含まないことになる。つまり、α は正の数でありさえすれば何でも良かったわけで、そうと最初から分かっていれば、α の値は結果が最も見やすくなるように選べばよいことになる。

そこで式 (∗37)(∗38) に戻り、$\alpha = 2$ と選ぶ。渦度の広がりが及ぶ距離は

$$\lambda = 2\sqrt{\nu t} \qquad (*39')$$

となり、最終的な結果が

$$u = U\,(1 - \operatorname{erf} s)\,, \qquad s = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \qquad (46.11)$$

のように得られる（図 46.2）。

練習問題 18

Navier–Stokes 方程式を解いて式 (46.11) を導く過程を、ノートもプリントも見ずに自力で再現せよ。

2 次元の流れにおける流れ関数

平行流れの場合は、連続の式が $\partial_x u = 0$ となり、これを用いて方程式を簡単化することができた。では、平行流れとは限らない 2 次元の流れではどうなるだろうか。

外力はないものとし、速度を $\mathbf{v} = (u, v)$ として 2 次元 Navier–Stokes 方程式を書くと

$$\rho\left(\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u\right) = -\partial_x p + \mu\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)u \quad (*42a)$$
$$\rho\left(\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v\right) = -\partial_y p + \mu\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)v \quad (*42b)$$

のようになり、連続の式は

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \qquad (*43)$$

のように書ける。

連続の式 (∗43) を 1 つの変数で満たすようにするには、

$$u = +\partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi \qquad (18.5)$$

と置けばよい。この ψ を**流れ関数**あるいは**流線関数**という。この名前があるのは、ψ の等値線の図を描くと流線が得られるからである。近接した 2 点 A, B での ψ の値を考えると、式 (∗12′) と同様に

$$\psi(\mathrm{B}) - \psi(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\partial_x \psi, \partial_y \psi) \qquad (*44)$$

が成り立つ。A と B の ψ の値が同じなら、左辺はゼロで、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $(\partial_x \psi, \partial_y \psi)$ に直交する。さて式 (18.5) により

$$(\partial_x \psi, \partial_y \psi) = (-v, u)$$

なので、$(\partial_x \psi, \partial_y \psi)$ は $\mathbf{v} = (u, v)$ を 90 度まわしたベクトルである。これに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交するということは、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は速度に平行でなければならない。したがって、ψ の等値線を微小な線分に区切ったものは、それぞれの場所での速度に平行であることになり、ゆえに ψ の等値線は**流線**を与える。

渦度方程式

問題設定によっては、Navier–Stokes 方程式から圧力 p を先に消去してしまったほうが解きやすくなる場合がある。そこで試しに、2 次元 Navier–Stokes 方程式 (∗42) から p を消去してみよう。

Navier–Stokes 方程式は、圧力 p に関しては線形の方程式なので、連立 1 次方程式で変数を消去する方法が応用できる。具体的には、まず方程式 (∗42b) を x で微分し、また方程式 (∗42a) を y で微分して、前者から後者を引けばよい。このとき、たとえば

$$\partial_x \left(u \partial_x v\right) = (\partial_x u)\partial_x v + u \partial_x^2 u$$

のように積の微分で出てくる項に注意する必要がある。式 (∗5) で与えられる**渦度**を用いて結果を整理し、さらに連続の式 (∗43) を利用すると、余った項がうまく消えて

$$\partial_t \omega + u \partial_x \omega + v \partial_y \omega = \nu \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) \omega \qquad (*45)$$

という**渦度方程式**が得られる[¶]。

練習問題 19

ノートも資料も見ないで、2 次元 Navier–Stokes 方程式から渦度方程式を導く過程を自力で再現せよ。

おまけ

2 次元の渦度方程式では、非線形項はすべて $\mathrm{D}\omega/\mathrm{D}t$ の形にまとまる。しかし 3 次元でも同じだと思ってはならない。3 次元の渦度方程式はもっと複雑で、速度勾配と渦度の積の項が生き残る。これにより、たとえば (x, y) 面内で回転する渦を流れが z 方向に引き伸ばすとかいった、2 次元では見られない機構が 3 次元では生じることになる。

渦度方程式 (∗45) は、$\omega = 0$ という自明解をもつ。つまり、初期に渦度がゼロで、なおかつ渦度の発生源がどこにもなければ、流れはいつまでたっても $\omega = 0$ である。また、ν の項がなければ、たとえ渦度の発生源があっても渦度は拡散できず、$\omega = 0$ のままとなる。これが式 (∗6) に示した**ポテンシャル流れ**にほかならない。

渦度方程式では p が消えたとは言うものの、u, v, ω という 3 つの変数を同時に扱うのも何かと不便である。そこで、2 次元渦度方程式 (∗45) を、さらに流れ関数 ψ で書き直してみる。結果は[‖]

$$\partial_t \omega + \det \begin{bmatrix} \partial_x \omega & \partial_y \omega \\ \partial_x \psi & \partial_y \psi \end{bmatrix} = \nu \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) \omega \qquad (*46a)$$

$$\omega = -\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) \psi \qquad (*46b)$$

のようになる。非線形項がヤコビアンの形になるのが特徴的である。

練習問題 20

式 (∗46) の導出過程を自力で再現せよ。

[¶] 式 (∗45) には粘性による拡散項があるので、これがない場合と区別して**渦度拡散方程式**と呼ぶこともある。

[‖] 講義ノートでは det の中身の順番を逆に書いてしまったようなので、各自で直しておくこと。

練習問題 21

コップを回転させる実験で長時間待つと、渦度が系全体に拡散し、最終的に ω は一様かつ定常となる。

- **ω が定数となった状態が式 (∗45) の解になっていることを確認せよ。**
- **系の対称性により $\psi = \psi(r)$ となるはずなので、これを用いて式 (∗46b) を書き直すと**

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2} + r^{-1}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r} = -\omega \qquad (*46b')$$

となることを示せ。

- **ω が定数になったとして方程式 (∗46b′) を解き、得られた ψ から速度場を求めよ。結果は**

$$(u, v) = \left(-\frac{\omega}{2}y,\ +\frac{\omega}{2}x\right) \qquad (*47)$$

となるはずである。

平板境界層に対する Blasius の解

図 46.3 のような場合の流れの様子を、2 次元 Navier–Stokes 方程式 (∗42) に基づいて考えてみよう。この場合、境界層の厚さ（渦度領域の y 方向への広がり）が板の寸法に比べて薄いということに基づき、Navier–Stokes 方程式を以下のように簡単化することができる:

- 圧力は未知量ではなく、境界層の外側の流れによって決まる既知量と考えてよい。
- y 方向の速度勾配は x 方向の速度勾配に比べてずっと大きいので、粘性項において $\mu\partial_y^2 u$ は残すべきだが、$\mu\partial_x^2 u$ は無視してよい。

これを**境界層近似**という。今の場合、境界層近似および定常流れの仮定により、Navier–Stokes 方程式は

$$u\partial_x u + v\partial_y u = \nu\partial_y^2 u \qquad (48.11)$$

のように簡単化できる。境界条件は、板の表面では粘着条件であり、また $y \to +\infty$ では u は一様流の速度 U に漸近するものとする。

式 (48.11) は、u, v という 2 変数に対する方程式なので、連続の式 (∗43) と連立させる必要がある。しかし、流れ関数を用いて

$$(\partial_y\psi)\partial_x\partial_y\psi - (\partial_x\psi)\partial_y^2\psi = \nu\partial_y^3\psi \qquad (48.11')$$

とすれば、連続の式 (∗43) のことはそれ以上考えなくて良くなる。

方程式 (48.11′) は、相似変数の方法で解くことができる。相似変数としては y/δ_{B} に相当するものを考え、ただし δ_{B} の代わりに λ と書くことにして

$$\psi = A(x)f(s), \quad s = \frac{y}{\lambda(x)} \qquad (*48)$$

と置く。このとき

$$u = \partial_y\psi = A(x)\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{A(x)}{\lambda(x)}f'(s)$$

となるので、$y \to +\infty$ で $u \to U$ となるように

$$f'(+\infty) = f'|_{s\to+\infty} = 1, \quad A(x) = U\,\lambda(x) \qquad (*49)$$

と選ぶことにする[**]。

いつものように連鎖則を用いて ψ の微分を計算する：

$$\begin{aligned}
\partial_y\psi &= U\lambda(x)\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = Uf'(s)\\
\partial_y^2\psi &= \partial_y\{Uf'(s)\} = U\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\mathrm{d}f'(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{U}{\lambda}f''(s)\\
\partial_y^3\psi &= \cdots = \frac{U}{\lambda^2}f'''(s)
\end{aligned}$$

ここまではそんなに難しくないが、$\partial_x\psi$ では積の微分を用いるのと $\partial s/\partial x$ の計算に注意が必要で

$$\begin{aligned}
\partial_x\psi &= U\partial_x\{\lambda(x)f(s)\} = U\lambda'(x)f(s) + U\lambda(x)\partial_x f(s)\\
&= U\lambda'(x)f(s) + U\lambda(x)\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\\
&= U\lambda'(x)f(s) + U\lambda(x)\left\{-\frac{\lambda'(x)}{\lambda^2}y\right\}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\\
&= U\lambda'(x)\{f(s) - sf'(s)\}
\end{aligned}$$

また

$$\partial_x\partial_y\psi = \partial_x\{Uf'(s)\} = \cdots = -U\frac{\lambda'(x)}{\lambda}sf''(s)$$

[**] もちろんこれが唯一の選択というわけではなく、教科書の式 (48.19) では $f'(+\infty) = 2$ と選んでいる。この場合には、もう片方の式を $A(x) = U\,\lambda(x)/2$ とすればつじつまが合うはずで、実際、式 (48.15) はそうなっている。

となる。

以上の内容を、解くべき方程式 (48.11′) に代入すると

$$U^2 \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} f(s) f''(s) = \frac{\nu U}{\{\lambda(x)\}^2} f'''(s)$$

すなわち

$$\frac{U}{\nu}\,\lambda(x)\lambda'(x) = -\frac{f'''(s)}{f(s)f''(s)} \qquad (*50)$$

となる。例によって左辺は y も s もなく x のみの式、右辺は s だけで x にも y にも直接依存しない形になった。したがって両辺とも定数になると考えられる。この定数は、式 (*36) の場合と同じく、正の定数であれば何に選んでもよい。つまり 1 でも 2 でも良いのだが、ここでは λ に余計な係数がつかないように、定数を 1/2 に選ぶ。こうして、偏微分方程式 (48.11′) は、

$$\lambda \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \frac{\nu}{2U} \qquad (*51)$$

$$2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}s^3} + f\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}s^2} = 0 \qquad (*52)$$

という 2 つの非線形 ODE に分離できる。式 (*51) のほうは解析的に解けて、解は

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad (*8')$$

となり、式 (*8) を裏付ける結果となる。方程式 (*52) のほうは数値的に解く必要があり、これにより、平板上の境界層の速度プロファイル（図 1）が得られる。これを **Blasius の解**という。

練習問題 22

Navier–Stokes 方程式から方程式 (*51)(*52) を導く過程を、プリントなどを見ずに自力で再現せよ。

なお、境界層近似で「粘性項のうち $\mu\partial_y^2 u$ は残すべきだが $\mu\partial_x^2 u$ は無視してよい」としたが、本当にこれで良いかどうか確認しておこう。得られた解を用いてこれらの項の大きさを計算すると

$$\partial_x^2 u \propto \frac{U}{x^2}, \quad \partial_y^2 u \propto \frac{U^2}{\nu x} = \frac{Ux}{\nu} \times \frac{U}{x^2}$$

となり、$Ux/\nu \gg 1$ であれば $\partial_y^2 u$ に比べて ∂_x^2 は無視できる。つまり、Reynolds 数 UL/ν が大きい場合を想定し、なおかつ板の先端部分（$x = 0$ の近く）を除外して考えることにするなら、境界層近似は妥当であると言える。

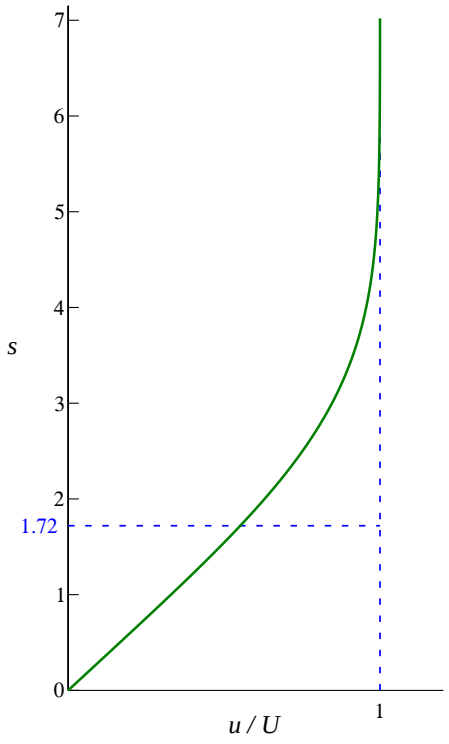

図 1　方程式 (*52) を数値的に解いて得られる、平板上の境界層の速度プロファイル。

おまけ

境界層厚さに関する式 (*8) では、あえて係数を無視しているが、係数まで含めて境界層の厚さをきちんと定義する方法がないわけではない。最もよく使われる定義のひとつが**排除厚さ**と呼ばれるものである。壁から十分に遠くて u が一様流と見なせるような位置を適当に選び、この位置を $y = y_*$ としよう。このとき、$0 < y < y_*$ の範囲を通る流量は、速度プロファイルが分かっていれば

$$\int_0^{y_*} u\,\mathrm{d}y$$

で与えられる。これは、境界層が占める厚さのぶんだけ Uy_* よりも小さいはずである。そこで

$$\int_0^{y_*} u\,\mathrm{d}y = (y_* - \delta_\mathrm{D})\,U \qquad (y_* \to +\infty)$$

によって排除厚さ δ_D を定義する（この式の右辺は「$y = \delta_\mathrm{D}$ の位置に “見えない壁” があって流体を排除しているが、その外は一様流」という仮想的な状況を表している）。平板上の境界層の場合、式 (*52) の数値解から δ_D を計算すると

$$\frac{\delta_\mathrm{D}}{\sqrt{\nu x/U}} = 1.72 \quad \text{すなわち} \quad \delta_\mathrm{D} = 1.72\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

という結果が得られる（図 1 の点線）。もちろん係数を無視すれば式 (*8) と同じになる。