

中間試験 (6/6) にそなえて講義ノートを見直す際に注意してほしいポイントや、講義でゆっくり説明できなかった事項をまとめた。ただし、このプリントだけ勉強すれば完璧だというわけではない (ほかにも復習しておくべきものはある)。そのほか、中間試験にはおそらく出ないけれども、あとで (他の講義とか卒業研究とか就職してからの仕事などで) 役に立つのではないかと思われるポイントを「おまけ」として補足してある。何かのついでにでも見直しておこう。この資料は、流体力学 II のホームページ (<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/fluid/>) からダウンロードできるようにする予定である。

粘性流体の基礎知識

非圧縮の粘性流体の運動の支配方程式は

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_{\text{外力}} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (40.1')$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (40.2)$$

で与えられる。式 (40.1') を **Navier-Stokes** 方程式という。ただし、式 (40.1') では、質量あたりの外力 \mathbf{K} の代わりに、体積あたりの外力 $\mathbf{F}_{\text{外力}} = \rho \mathbf{K}$ を用いた。また、このプリントでは、添字を用いる都合上、速度場の成分を $\mathbf{v} = (u, v, w) = (v_x, v_y, v_z)$ とする。他の記号は教科書*に合わせてあるので各自で確認すること。

練習問題 1

2次元および3次元の場合に対し、式 (40.1')(40.2) を成分表示で書き直せ。

おまけ

圧縮性流体の場合には、非圧縮条件 (40.2) すなわち非圧縮流体の連続の式を一般の連続の式 (3.2) で置き換えるのは当然として、さらに p と ρ を結びつける関係式が必要となる。特に気体の場合、理想気体の状態方程式が適用できるものとして

$$p = \rho RT \quad (R \text{ は質量あたりの気体定数})$$

とするのが普通である。この式は温度 T を含むため、さらに内部エネルギーの balance law と連立させる必要がある。

粘性流体の流れの様子は、おもに、**Reynolds** 数とよばれる無次元パラメータで特徴づけられる (R または Re であらわす)。これは、Navier-Stokes 方程式 (40.1') の左辺に含まれる移流項 $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ と、右辺に含まれる粘性項 $\mu \Delta \mathbf{v}$ との相対的な大きさをあらわしたものである。

たとえば直径 $D = 3 \text{ cm}$ の棒が速さ $U = 10 \text{ m/s}$ の水の流れのなかに置かれている場合、Reynolds 数は

$$Re = \frac{\rho_{\text{water}} U D}{\mu_{\text{water}}} = \frac{(10 \text{ m/s})(3 \text{ cm})}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3 \times 10^5 \quad (*1)$$

となる。ただしここで常温の水の動粘性係数が

$$\frac{\mu_{\text{water}}}{\rho_{\text{water}}} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (*2)$$

であることを用いた。

空気の密度は水の約 1/1000 で、粘性係数は 1/100 より少し大きいので、動粘性係数は水の 10 倍~20 倍程度となる (温度によって多少変化する)。具体的な値は、理科年表で調べるか、または教科書の p.186 を見ること。

練習問題 2

他の条件は式 (*1) と同じだとして、水の代わりに空気をを用いた場合の Reynolds 数を計算せよ。

おまけ

Navier-Stokes 方程式にせよ Euler 方程式にせよ、具体的な流れをあらわす解を考えるには、流体が占める領域の果てすなわち境界面での条件を与える必要がある。多くの場合、流体にとっての境界面とは、流体と物体が接する壁面のことである。Navier-Stokes 方程式で記述されるような粘性流体に対しては、固体壁面での境界条件は粘着条件となる。詳しくは中間試験が終わったあとに説明する。

速度場

Navier-Stokes 方程式 (40.1') は粘性流体の運動量の式であり、物理的な意味付けとしては、質点力学の場合の

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \text{あるいは} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (*3)$$

に対応する。ただし、Navier-Stokes 方程式 (40.1') と式 (*3) は、同じく \mathbf{v} を求める方程式だとは言っても、数学的にはいくつか大きな違いがある。簡単に言うと：

* 今井功「流体力学」(岩波書店 物理テキストシリーズ 9)

- 式(*3)では、1 個の質点の速度 \mathbf{v} が未知で、それを t の関数として求める。
- Navier-Stokes 方程式 (40.1') では、速度場 \mathbf{v} が未知で、 \mathbf{v} を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ および t の関数として求める。

ささいな違いに見えるかもしれないが、よく考えると、 (x, y, z) の位置づけが全く違う。質点の運動方程式 (*3) では、 x は基本的には “ $x = x(t) = ??$ ” という未知関数である[†]。他方、Navier-Stokes 方程式の場合、 (x, y, z) は、 t と同じく独立変数であり、未知関数ではない。

こういうわけで、Navier-Stokes 方程式 (40.1') において「速度」と言う場合は、位置 \mathbf{r} と時刻 t の関数としての速度、すなわち速度場を意味する。速度場を図示するには、 (x, y) 平面上の各点に、速度をあらわす小さい矢印を示すのが分かりやすい。矢印の代わりに流線を図示することもある。

練習問題 3

以下の速度場 $\mathbf{v} = (u, v)$ を (x, y) 面上に図示せよ：

- (あ) $(u, v) = (by, 0)$
 - (い) $(u, v) = (cy, cx)$
 - (う) $(u, v) = \begin{cases} (-by, bx) & (x^2 + y^2 < a^2) \\ (-\frac{a^2 by}{x^2 + y^2}, \frac{a^2 bx}{x^2 + y^2}) & (x^2 + y^2 > a^2) \end{cases}$
- なお a, b, c は適当な次元をもつ正の定数である。

おまけ

特別な場合には、小さな矢印を用いるのとは別の方法で速度をあらわすこともある。特に、位置も速度も 1 変数であることが分かっている、たとえば $u = u(y)$ という関数に尽きる場合には、 y 軸と u 軸を取って図示すればよい (速度プロファイル)。また、速度を独立変数とするホドグラフという高等技もある (ただし初心者にはお勧めできない)。

速度場 \mathbf{v} から流体の加速度を求めるには、質点力学の場合と違って、単に \mathbf{v} を t で微分してもダメである。独立変数が (x, y, z, t) なので、 $\partial_t \mathbf{v}$ というのは (x, y, z) を固定した時間微分 (物理的なイメージで言えば、空間的に固定された流速計の検知する速度の時間変化) になり、したがって $\partial_t \mathbf{v}$ は加速度とは違うものになる。

[†] 質点力学でも、ポテンシャル U で力をあらわす式などでは x は独立変数になるし、量子力学のことなど、言い出すときりがないが、説明の都合上「基本的には…」ということしておく。

加速度を求めるには、流体にトレーサ[‡]を浮かべ (または流体そのものを粒子と見なし)、それを追跡して速度の変化を見なければならぬ。これをまじめに実行するには、5/2 の講義ノートにあるように、トレーサの位置に関する ODE を解いて、位置 \mathbf{r} を時刻 t の関数として求め、そこから加速度を計算する。つまり **Lagrange** 記述にしてしまえば、質点力学と同じ形で運動方程式を書ける。これは確かに強力な方法だが、具体的な計算を進めようとする、いろいろと大変であることが分かっている。

そこで普通は、位置 \mathbf{r} と時刻 t の関数 (**Euler** 記述) に対する時間微分と、Lagrange 記述での時間微分とを結びつける公式を利用する。速度の時間微分に対する公式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.4')$$

となる (導出は教科書の p. 10 を見よ)。

練習問題 4

$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ と $\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}$ は全く違うものであることを説明せよ (成分で書いて比較してみるとよい)。

練習問題 5

流体粒子の位置が、Lagrange 記述で

$$\begin{aligned} x &= \alpha(t - s_1) \\ y &= s_2 + \beta(t - s_1) + \gamma(t - s_1)^2 \end{aligned}$$

のように与えられている。ここで α, β, γ は適当な次元をもつ定数、また (s_1, s_2) はラベル変数[§]である。速度 (u, v) を (x, y) の関数として書き表し (ヒント: s_1 を消去)、これから公式 (2.4') を用いて加速度を求めよ。その結果が、Lagrange 表示での加速度の計算結果と一致することを確認せよ。

練習問題 6

速度場 $(u, v) = (by, bx)$ に対し、加速度を求めよ。いったんトレーサの位置を t の関数として求めてそこから加速度を計算する方法と、公式 (2.4') を用いる方法とで、同じ結果が得られることを確認せよ。

[‡] 目印になるような色つきの小さい粒子を想像せよ。ここでは、流れに完全に追従するような理想的なトレーサを考える。

[§] 粒子を識別するための変数のこと (粒子番号のようなもの)。同じ粒子を追跡している限りは s_1 も s_2 も一定の値をとる。

Navier-Stokes 方程式の立てかた

流体の方程式を立てるときの重要な考え方のひとつは、何らかの保存量（質量・運動量など、勝手に増減することのない量）に着目し、ある時間幅 Δt について

$$[\text{残高 (after)}] - [\text{残高 (before)}] = \sum [\text{収入} \cdot \text{支出}] \quad (*4)$$

という式を立てることである。これを **balance law** (収支釣り合いの法則) という。

練習問題 7

日常的な事柄で balance law が適用できる例をいくつか挙げよ。

Navier-Stokes 方程式 (40.1') を立てるには、空間に固定された検査体積を用いて運動量収支 (運動量の balance law) を考える。検査体積として微小な直方体 (体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$) を考えると、検査体積内にある質量は $\Delta m = \rho \Delta V$ なので

$$\left[\begin{array}{c} \text{検査体積内} \\ \text{の運動量} \end{array} \right] = \Delta m \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \Delta V$$

となる。運動量の出入りは力積だから、運動量収支は

$$\begin{aligned} & (\rho \mathbf{v})|_{t+\Delta t} \Delta V - (\rho \mathbf{v})|_t \Delta V \\ & = \sum [\text{検査体積内の流体が受ける力積}] \quad (*5) \end{aligned}$$

のように書ける (ΔV は時間変化しないことに注意)。

式 (*5) の右辺として、次の 4 つを考慮する:

- 外力 (重力など) による力積
- 圧力による力積
- 粘性応力による力積
- 流体とともに流入する運動量

2 番目と 3 番目は「面積力」として一緒に扱う場合もあるが、ここでは、いちおう分けておく。3 番めの項の有無が、流体力学 I で扱った Euler 方程式と、流体力学 II で扱う Navier-Stokes 方程式との違いである。4 番目の項は移流項[¶]と呼ばれる。

外力として、たとえば重力を考えると、

$$[\text{重力による力積}] = \Delta m g \Delta t = \rho g \Delta V \Delta t \quad (*6)$$

[¶] 「対流項」とも言う。対流と言っても、ぐるぐる回る流れという意味ではなく、流れに運ばれるという意味である。

である。重力以外の外力の場合も同じような形で書いて、体積あたりの外力の大きさを $\mathbf{F}_{\text{外力}}$ とすると

$$[\text{外力による力積}] = \mathbf{F}_{\text{外力}} \Delta V \Delta t \quad (*6')$$

のようになる。

続いて圧力項を考える。圧力の特徴は、方向性をもたない (等方的である) こと、すなわち面の方向がどうであって常にも面に垂直な力として作用し、しかも大きさが面の方向に依存せず同じ位置では同じ大きさを持つことである^{||}。これを数学的に言いあらわすと、圧力 p はスカラーであり、圧力によって面 ΔS に作用する力のベクトルは、単位法線ベクトル \mathbf{n} を用いて

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{圧力}} = -p \mathbf{n} \Delta S \quad (*7)$$

のように与えられる。これを用いて、 ΔV の 6 つの面にはたらく圧力による力積を求める。講義ノートやグループワーク資料にあるように、向かい合った面どうしを組み合わせて計算すると**、結果は

$$[\text{圧力による力積}] = -(\text{grad } p) \Delta V \Delta t \quad (*8)$$

となる。

練習問題 8

式 (*8) の導出過程を、プリントや講義ノートを見ずに^{††}自力で示せ。

講義ノートとは順番が逆になるが、続いて粘性応力を考えよう。粘性応力は、流体の変形にさからうように生じる面積力である。扱い方は圧力と似ているが、ただし、粘性応力によって面 ΔS に作用する力は、面に垂直とも平行とも限らない (教科書の図 3.2 と図 42.2 を見比べよ)。

^{||} 圧力の性質についての実験を思い出そう: 流体に圧力をかけると、星型スポンジは形を保ったまま大きさだけが小さくなる。

** ここでは検査体積として微小な直方体を考えているので、引き算になるような組み合わせをすることで、結果をただちに微分に直すことができる。検査体積が微小でない場合は、教科書 §3 のように、Gauß の定理を用いて微分に直す必要がある。

^{††} こういう場合の勉強方法: まず最初にプリントをよく読んで道筋を把握したあと、プリントを見ずにノートに自力で内容を書いてみる。詰まった時は、ノートを閉じてプリントを少しだけ見てから、再びノートを開いてプリントなしで進めるところまで進み、またちょっとだけプリントを見て... という具合にすると良い。

たとえば、微小な直方体の6つの面のうち、上の面 (+z 方向の面) に着目しよう。面を通してはたらく力が、もし圧力だけであるなら、それは式(*7)で $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ とすれば得られる。それに粘性による面積力を加えて

$$\left[\begin{array}{l} +z \text{ 方向の面を通} \\ \text{してはたらく力} \end{array} \right] = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} \Delta S \quad (*9)$$

と書くことにしよう。右辺第2項の中身は τ_{ij} のような形をしていて、最初の添字 i は力の方向、あとの添字 j は面の方向をあらわす。別の方向の面とか、教科書の図 42.3 のような斜めの面も含めて一般的に書くと、式(*9)の第2項にあたるものは

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{\text{粘性}} &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} n_x \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} n_y \Delta S + \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} n_z \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ \tau_{yx}n_x + \tau_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \tau_{zz}n_z \end{bmatrix} \Delta S \\ &= \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Delta S \quad (*10) \end{aligned}$$

のようにあらわされる。式(*7)と式(*10)を見比べると、力が面積に比例することや面の方向に依存することは同じである。また、 $\Delta \mathbf{F}_{\text{圧力}}$ や $\Delta \mathbf{F}_{\text{粘性}}$ はもちろんベクトルだが、 p や τ 自体はベクトルではないという点も同じである。重要な違いは、式(*7)が p という1つのスカラーであらわされるのに対し、式(*10)は 3×3 の正方行列(粘性応力テンソル)であらわされるという点にある。

検査面としてとった直方体の6つの面のうち、位置 z にあり (x, y) 面に平行な面をⓉとし、これに平行で位置 $z + \Delta z$ にある面をⓊとする。ここで、たとえば

$$[\text{Ⓣの面が受ける粘性力}] = \Delta \mathbf{F}_{\text{Ⓣ}}$$

のように示すことにしよう(“粘性”の表記は省略)。さて

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ⓣの面の} \\ \text{単位法線} \\ \text{ベクトル} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{l} \text{Ⓤの面の} \\ \text{単位法線} \\ \text{ベクトル} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

で、面積はどちらも $\Delta x \Delta y$ だから、式(*10)より

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{Ⓣ}} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} \Bigg|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y, \quad \Delta \mathbf{F}_{\text{Ⓤ}} = - \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} \Bigg|_z \Delta x \Delta y$$

である。したがって、力積の(たとえば) y 成分が

$$\begin{aligned} &(\Delta \mathbf{F}_{\text{Ⓣ}} + \Delta \mathbf{F}_{\text{Ⓤ}})_y \Delta t \\ &= (\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z) \Delta x \Delta y \Delta t \\ &= \frac{\tau_{yz}|_{z+\Delta z} - \tau_{yz}|_z}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \rightarrow \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Delta V \Delta t \end{aligned}$$

のように計算できる。さらにⓉⓊ以外の全ての面を含めた合計を考え、力積の3つの成分を同様に計算すると

$$\left[\begin{array}{l} \text{粘性応力に} \\ \text{よる力積} \end{array} \right] = \sum_j \partial_j \begin{bmatrix} \tau_{xj} \\ \tau_{yj} \\ \tau_{zj} \end{bmatrix} \Delta V \Delta t \quad (*11)$$

となる(ここで \sum は $j = x, y, z$ に対する和を示す)。

練習問題 9

式(*11)の導出過程を、まず講義ノート等を見ながら自分の手で再現し、結果を \sum なしで示せ。それが出来たら、次に、式(*11)の導出過程を、何も見ずに自力で示せ。

さらに4番目の移流項について考える。たとえばⓉの面から流入する流体の質量は

$$\Delta m'_{\text{Ⓣ}} = (\rho v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y$$

であり、質量 $\Delta m'$ の流体は運動量 $\Delta m' \mathbf{v}$ をもつので、

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{Ⓣの面から流入} \\ \text{する運動量} \end{array} \right] &= \Delta m'_{\text{Ⓣ}} \mathbf{v}_{\text{Ⓣ}} \\ &= (\rho v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \times \mathbf{v}|_z \\ &= (\rho v v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \quad (*12) \end{aligned}$$

となる。運動量はベクトルであることを忘れてはいけない。式(*12)はベクトルであって、その i 成分 ($i = x, y, z$) は「Ⓣの面から流入する運動量の i 成分」を意味し、

$$\begin{aligned} \text{[式(*12)の } x \text{ 成分]} &= (\rho v_x v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \\ \text{[式(*12)の } y \text{ 成分]} &= (\rho v_y v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \\ \text{[式(*12)の } z \text{ 成分]} &= (\rho v_z v_z)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

である。他のすべての面について運動量の流入を求め、向かい合った面どうしを組み合わせると

〔流体とともに流
入する運動量〕

$$\begin{aligned}
 &= - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} \end{array} \right] \Delta V \Delta t \\
 &= -\rho \sum_j \partial_j \begin{bmatrix} v_x v_j \\ v_y v_j \\ v_z v_j \end{bmatrix} \Delta V \Delta t \quad (*13)
 \end{aligned}$$

となる。式 (*11) と形が似ていることにも注目しよう。

これで式 (*5) の右辺に代入すべき項がすべてそろった。式 (*6)(*8)(*11)(*13) を式 (*5) の右辺に代入し、両辺を $\Delta V \Delta t$ で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとったあと、適当に整理して、運動量収支の式の具体的な形が

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\rho v_i) + \sum_j \partial_j(\rho v_i v_j) \\
 = \rho g_i - \partial_i p + \sum_j \partial_j \tau_{ij} \quad (*14)
 \end{aligned}$$

のように得られる。

練習問題 10

式 (*14) を式 (*5) から導出する仮定を、プリントや講義ノートを見ずに自力で示せ。また、 \sum や省略を用いずに式 (*14) を書き直せ。

練習問題 11

このプリントでの式 (*14) の導出と同じ考え方により、 ρ が定数でない場合を含む連続の式

$$\partial_t \rho + \sum_j \partial_j(\rho v_j) = 0 \quad (3.2')$$

を導出せよ。(ヒント: 質量に対する balance law)

式 (*14) を式 (40.1') の形にするには、さらにいくつかのステップが必要である。まず、左辺にある積の微分を計算し、非圧縮流体の連続の式 (40.2) を用いると^{††}

^{††} じつは圧縮性のある場合も式 (3.2') を用いて同じ計算ができる。

$$\begin{aligned}
 [\text{式 (*14) の左辺}] &= \rho \partial_t v_i + \rho \sum_j [(\partial_j v_i) v_j + v_i (\partial_j v_j)] \\
 &= \rho \left(\partial_t v_i + \sum_j v_j \partial_j v_i \right) \\
 &= \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (*15)
 \end{aligned}$$

となり、式 (40.1') の左辺と同じ形になる。他方、右辺にある粘性応力テンソル τ_{ij} が未知のままなので、これを何とかする必要がある。単純に τ_{ij} を無視して良いなら Euler 方程式になる。そうしないのであれば、 τ_{ij} を何か他の量であらわす式 (構成関係式) を別途求めて代入する必要がある。これはあとで式 (*27) または (*30) とし示す。

練習問題 12

式 (*15) で積の微分を計算する箇所を、 \sum を使わない形 (足し算を正直に書く形) で書いてみよ。

練習問題 13

プリントなどを見ずに、自力で式 (*15) を示せ。間違いを防ぐため、慣れるまでは \sum は使わず、また演算子の作用する先に注意して計算すること。

おまけ

式 (*14) は、太字ベクトル記法で書くと

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (*14')$$

のようになる。ここで \otimes はテンソル積、 $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ および $\boldsymbol{\tau}$ はどちらも (2 階の) テンソルであり、 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ と $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ は 2 階のテンソルの発散であるのでベクトルになる。

2 階のテンソルとは、(多少乱暴な言い方をすると) ベクトルとベクトルを結びつける正方形のことである。あるいは“ベクトルを成分とするベクトル”と考えてもよい。物理的なベクトルは座標軸の取り方に応じて見掛けの成分表示が変わるが、ベクトルそのものは変わらない。テンソルについても同じことが言えて、たとえば x 軸と y 軸を入れ替えると xx 成分・ yy 成分・ xy 成分・ yx 成分が入れ替わる。このような挙動を示す正方形行列がテンソルである (詳しくは教科書の §43 を見よ)。

テンソルを含む式は、すべてを書くとき長くなってしまいがちだが、式 (*11) や式 (*14) のように \sum_j を用いると多少は短くなる。さらに「同じ添字が重複しているときは \sum を補って読む」と取り決めて、 \sum を省いてしまうことも多い。この取り決めを **Einstein** の総和規約という。相対性理論では同じことを 4 回書くので、Einstein の総和規約が威力を発揮する。

単純剪断流における粘性応力

式 (*14) には粘性応力 τ が含まれている。これを具体的な問題に適用するためには、粘性応力 τ を物質の性質および他の変数に関係づける式 (構成関係式) が必要である。粘性応力は、流れによる変形に逆らうように生じる力であり、速度がゼロなら粘性応力もゼロになるはずだから*、 τ を速度 \mathbf{v} に関係づけられよと思われる。

まずは、粘性流体の流れのなかで最も基本的な単純剪断流 (simple shear flow) の場合について考察しよう。簡単化のため、しばらく 2 次元で考える。流れの方向に x 軸をとると、単純剪断流は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\dot{\gamma} = \text{const.}) \quad (*16)$$

とあらわされる。

練習問題 14

単純剪断流の速度ベクトル場 (*16) を図示せよ。

単純剪断流 (*16) は、厚さ Δy のトランプのカードをたくさん積み重ねたものとして思い描くことができる。流体における粘性応力とは、“カード”のあいだに速度差があると、隣のカードに引きずられて速度が変化するような効果である。応力の成分のうち、引きずりの強さに相当するのは、 y 方向の面における x 方向の力をあらわす τ_{xy} である。通常の流体では、今のような場合、 τ_{xy} は速度勾配 $\partial_y u (= \dot{\gamma})$ に比例することが知られていて、

$$\text{単純剪断流の場合: } \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \dot{\gamma} \quad (*17)$$

と書ける。比例係数 μ は粘性係数と呼ばれる。

速度勾配テンソルと歪み速度テンソル

式 (*17) は「流れがどこでも x 軸に平行」という限定された場合の式なので、これを一般化して、任意の流れに対して粘性応力テンソルの各成分を求められるように

* これが弾性体の応力と流体の粘性応力の大きな違いである。弾性体の場合には、もとの形と異なる状態に変形させたならば、たとえ速度がゼロであっても応力はゼロにならない。分かりやすく言えば、弾性体は「もとの形」を覚えているので、速度がどうであろうと、もとの形に戻ろうとする応力を生じる。他方、粘性流体は一瞬の過去のことしか覚えていないので、速度がゼロになると、圧力以外の応力は消えてしまう。

したい。素朴に考えると、式 (*17) の $\partial_y u$ を

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} \quad (*18)$$

のような正方行列 (速度勾配テンソル) で置き換えれば良いような気がするが、これではダメである。それは剛体回転の場合を考えてみれば分かる。剛体回転は流体の変形を伴わない運動であり、ある意味で流体が止まっているのと同じなので (カメラを流体の動きに合わせて動かしながら撮影することを考えよう)、粘性応力も生じないはずだが、この場合に速度勾配を計算してもゼロにならない。したがって、粘性応力を求めるのに速度勾配そのものを用いることはできない。

それなら代わりに何を用いるべきか? というのが問題で、答えを一言で言うと、^{ひず}歪み速度テンソル

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (*19)$$

すなわち

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\partial_x u & \partial_x v + \partial_y u \\ \partial_y u + \partial_x v & 2\partial_y v \end{bmatrix} \quad (*19')$$

を用いられよ。なぜそうなるかを以下に説明する。

練習問題 15

z 軸まわりの剛体回転は、 c を定数として

$$(u, v) = (-cy, cx) \quad (*20)$$

のように書ける。この場合の速度勾配テンソルと歪み速度テンソルを計算せよ。

バネとダッシュポット

流体について考える前の練習として、まずはバネの変形と張力の関係を考える。バネの一端 A が点 (x_A, y_A) にあり、他端 B が (x_B, y_B) にあったとする。このときのバネの全長を R とすると、これは両端間の距離に等しく、

$$R^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

である。もし、 R と自然長 ℓ に差がなければ、バネには張力は生じない。差があれば張力が生じる。このバネが Hooke の法則に完全に従うとすれば、張力 S は

$$S = k \left\{ \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} - \ell \right\} \quad (*21)$$

と与えられる。これがバネの構成関係式である。

バネという部品が、金属のような弾性体を扱いやすくなったのだとすれば、油のような粘性流体を、扱いやすい部品の形にしたのが、ダッシュポットである。ダッシュポットの場合は「自然長」というものはない。張力は、 Δt のあいだに長さがどれだけ変化したかで決まる。ある時刻 t に、ダッシュポットのふたつの端が、それぞれ $(x_1, 0)$ および $(x_2, 0)$ にあったとし (分かりやすいように $x_2 > x_1$ とする)、時間 Δt の間にそれぞれの端が

$$\begin{aligned} (x_1(t), 0) &\rightarrow (x_1(t + \Delta t), 0) = (x_1(t), 0) + (v_1, 0)\Delta t \\ (x_2(t), 0) &\rightarrow (x_2(t + \Delta t), 0) = (x_2(t), 0) + (v_2, 0)\Delta t \end{aligned}$$

に移動したとすると、長さは $(v_2 - v_1)\Delta t$ だけ伸びることになる。この伸びに逆らうように、ダッシュポットには

$$S_{\text{dashpot}} = k'(v_2 - v_1) \quad (*22)$$

だけの張力が生じる (抵抗係数を k' とした)。

流体の変形

流体の粘性応力も、ダッシュポットと同じで、時間 Δt のあいだの引き伸ばしを計算し、それに比例して粘性応力が生じる、と考えればよい。ただし、長さで考えると平方根のせいで少々面倒なことになるので、バネの場合の R^2 に相当するものを考える。引き伸ばしを具体的に計算し、その結果を見ることで、流体の変形の様子が式 (*19) の歪み速度テンソルであらわされることを確かめよう。

流体のなかに粒子を適当にばらまいて、そのひとつを A とする。A を中心とする微小な円 (3次元の場合は球) を描き、円周上にある点を B とする。時間 Δt のあいだに、A は位置 A' に、B は位置 B' に移動したとしよう。相対位置ベクトルを $\overrightarrow{AB} = (\Delta x, \Delta y)$ とすると

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} &\rightarrow A' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \mathbf{v}(A)\Delta t \\ B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} &\rightarrow B' = B + \mathbf{v}(B)\Delta t \end{aligned}$$

となり、このふたつの式を組み合わせると

$$B \rightarrow B' = \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \{\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)\} \Delta t$$

すなわち

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \{\mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A)\} \Delta t \quad (*23)$$

を得る (ダッシュポットの場合の式と見比べてみよう)。

あとは、AB 間の速度差を求めて式 (*23) に代入すれば、引き伸ばしの様子が分かる。この速度差は、速度 \mathbf{v} を (x, y) に関して Taylor 展開することにより

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(B) - \mathbf{v}(A) &= \begin{bmatrix} (\partial_x u)\Delta x + (\partial_y u)\Delta y \\ (\partial_x v)\Delta x + (\partial_y v)\Delta y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44.1')$$

のように求められる。式 (44.1') の L は、式 (*18) で定義した速度勾配テンソルである。

これで準備はできた。式 (44.1') を式 (*23) に代入し、次に、バネの場合の R^2 に相当するものとして $|\overrightarrow{A'B'}|^2$ を計算しよう。計算結果を整理すると

$$|\overrightarrow{A'B'}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + q\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (*24)$$

のようになり、ここで q は $(\Delta x, \Delta y)$ の 2 次形式で

$$q = [\Delta x \ \Delta y] \begin{bmatrix} 2\partial_x u & \partial_x v + \partial_y u \\ \partial_y u + \partial_x v & 2\partial_y v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (*25)$$

のようになる。その中身の正方行列を $2\dot{\epsilon}$ と置くことにすれば、この $\dot{\epsilon}$ が、式 (*19) の歪み速度にほかならない。

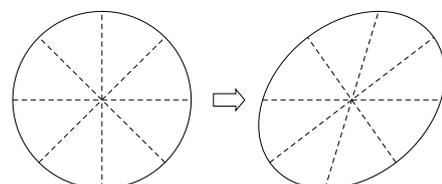
練習問題 16

式 (*24)(*25) を自力で導出せよ。

歪み速度テンソルの固有値と固有ベクトルを求めれば、ある瞬間に円 (または球) だったものが、次の瞬間にどのように歪むかが分かる。特に、単純剪断流の場合、固有ベクトルは $(1, \pm 1)$ となり、 x 軸に対して 45 度の方向に引き伸ばしと押しつぶしが起きることが分かる。

練習問題 17

単純剪断流 (*16) の場合に q および $\dot{\epsilon}$ を具体的に求め、伸長方向が 45 度方向であることを確かめよ。



構成関係式

変形の様子が歪み速度テンソル $\dot{\epsilon}$ で書けると分かったので、これを粘性応力に関係づける式 (構成関係式) が得られれば、Navier-Stokes 方程式 (40.1') が導出できる。

通常の流体では、構成関係式は式 (*17) とつじつまが合うはずなので、構成関係式に単純剪断流の速度場 (*16) を代入したときは式 (*17) と一致するようになっていなければならない。手がかりを見つげるため、式 (*16) に対して歪み速度テンソルを 3次元で計算してみると

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{したがって} \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\gamma}/2$$

となる。これと式 (*17) を見比べると $\tau_{xy} = 2\mu\dot{\epsilon}_{xy}$ という関係が成り立っている。この関係式は、単純剪断流という特定の流れに対して、しかも τ の 9 個の成分のうち τ_{xy} に限定して得られた式であるが、左辺と右辺の添字がうまい具合に一致していることから、一般に

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (*26)$$

と考えればうまく行きそうである。実際、詳しい考察により、式 (*26) は、非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) の粘性流体に対しては正しいことが示される (圧縮性のある場合は式 (*30) のようになる)。式 (*26) に式 (*19) を代入し、

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (*27)$$

すなわち

$$\tau = \mu \begin{bmatrix} 2\partial_x v_x & \partial_x v_y + \partial_y v_x & \partial_x v_z + \partial_z v_x \\ \partial_y v_x + \partial_x v_y & 2\partial_y v_y & \partial_y v_z + \partial_z v_y \\ \partial_z v_x + \partial_x v_z & \partial_z v_y + \partial_y v_z & 2\partial_z v_z \end{bmatrix}$$

という結果を得る[†]。これが非圧縮の粘性流体の構成関係式である。

練習問題 18

速度場が、 a, b, c を定数として

$$(u, v, w) = (axy, bx + cy^2, 0)$$

となることが分かっているとす。まず、非圧縮条件を満たすように a の値を定めよ。次に粘性応力テンソル τ を計算し、正方行列の形で示せ。

[†] 演算子を含む式なので、左右を入れ替えてよいものと入れ替えてはいけないものがあることに注意して計算すること。たとえば $\partial_y \partial_x v_x = \partial_x \partial_y v_x$ は良いが、 $\partial_x v_x$ を $v_x \partial_x$ とするのはダメ。

最後に、式 (*27) を運動量収支の式 (*14) に代入する。とりあえず x 成分を考え、 μ は定数だとして

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_j \tau_{xj} &= \partial_x (2\mu \partial_x v_x) + \partial_y [\mu(\partial_x v_y + \partial_y v_x)] \\ &\quad + \partial_z [\mu(\partial_x v_z + \partial_z v_x)] \\ &= \mu (\partial_x^2 v_x + \partial_y \partial_x v_y + \partial_z \partial_x v_z) \\ &\quad + \mu (\partial_x^2 v_x + \partial_y^2 v_x + \partial_z^2 v_x) \\ &= \mu \partial_x \text{div } \mathbf{v} + \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) v_x \\ &= \mu \Delta v_x \end{aligned} \quad (*28)$$

を得る。さらに y 成分や z 成分についても同様に考えると、式 (40.1') と一致する結果が得られる。

練習問題 19

式 (*28) の計算過程を自力で再現せよ。さらに、運動量の y 成分および z 成分に対して式 (*28) に対応する項を求め、これにより式 (40.1') を導出せよ。

おまけ

非圧縮とは限らない場合について、粘性流体の構成関係式を求めてみよう。この場合でも、粘性応力は変形に逆らうように生じること、また粘性応力は変形の速さに比例することは変わらない。ただし、非圧縮流体では球が楕円体になるような変形だけ考えれば良かったが、圧縮性を考えるということは、球が形を変えずに体積が小さくなるような変形も生じる。これらは違う種類の変形なので、いったん別々に扱う必要がある。

そこで、歪み速度テンソル $\dot{\epsilon}$ を、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \right) + \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (*29)$$

のように 2 つに分ける。第 1 項は形の変化、第 2 項は体積変化を示す。これらの項の線形結合により、粘性応力テンソルは

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \right) + \mu'(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (*30)$$

という式で与えられる。係数 μ は粘性率 (粘性係数)、 μ' は体積粘性率と呼ばれる。式 (*30) に式 (*19) を代入すると

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (\text{div } \mathbf{v})\delta_{ij} \quad (*30')$$

となり、これが圧縮性のある場合まで含めた粘性流体の構成関係式である。特に非圧縮流体の場合は、式 (40.2) を代入すると、式 (*27) に帰着することが確認できる。