

気体力学 補足資料 (2012 年 2 月)

2012-02-05 大信田 (応用数理工学科)

気体力学の期末試験 (2/7) のための補足資料です。もちろんこの資料だけでなく講義ノートや熱力学のプリントも見直しておいてください。流体力学 II のときと同様に、<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/fluid/> から資料をダウンロードできるようにしておきます。

圧縮性流体について学ぶための準備

流体力学の復習

何も見ないで以下のものを書いてみよう。書けなかった場合は、前期に勉強した流体力学 I/II の教科書*を見て復習しておくこと。

- 圧縮性流体の連続の式
[書けなかった場合 → 教科書の式 (3.1)(3.2)]
- Euler 方程式 (非粘性流体の運動量の式)
[書けなかった場合 → 教科書の式 (3.5)(3.6)]

流体の方程式をたてるには、大きく分けて 2 つの考え方がある。ひとつは空間に固定された検査面を考え、その検査面に対する流体の出入りを考えて、balance law (収支釣り合い法則) の形で式をたてるという方法である。この考え方で得られる方程式は、基本的には

$$\partial_t(\text{なんとか}) + \text{div}(\cdots) = 0$$

のような形になる。

練習問題 1

流体は非粘性で、かつ圧縮性があるものとする。運動量 (質量×速度) についての balance law の考え方をを用いて Euler 方程式を導出せよ。なお、外力項は含めても含めなくてもよい。

流体の方程式についてのもうひとつの考え方は、流体とともに動く曲線座標系を設定し、この座標系に基づいて各種の時間変化を考えるという方法である。これは“流体の気持ちになって考える視点”と言い替えてもよい。この視点での時間微分のことを

Lagrange 微分と言い、 D/Dt という記号で示す。また、このプリントでは D_t のような略記法も用いる。

練習問題 2

車の流れを流体と考え、その密度を ρ として、 $\partial_t \rho$ と $D_t \rho$ の違いがイメージできるような例を考えよ。

通常の時間微分 ∂_t と Lagrange 微分 D_t の関係について確認しよう。簡単化のため、1 次元の場合を例に考える。適当なスカラー場 (仮に $\varphi(x, t)$ とする) に対し、これら 2 種類の時間微分は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, t + \Delta t) - \varphi(x, t)}{\Delta t} \quad (*1)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + u\Delta t, t + \Delta t) - \varphi(x, t)}{\Delta t} \quad (*2)$$

のように定義される。簡単な計算により、 $\partial_t \varphi$ と $D_t \varphi$ のあいだには

$$D_t \varphi = \partial_t \varphi + u \partial_x \varphi \quad \text{すなわち} \quad D_t = \partial_t + u \partial_x$$

という関係があることが分かる (1 次元の場合)。

練習問題 3

3 次元の場合について ∂_t と D_t の関係を示せ。

熱力学の復習

圧縮性流体では熱力学の知識が不可欠である。その理由を理解するために、まず、非圧縮流体の方程式をどうやって解いたか考えてみよう。非圧縮流体では、

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

という式と運動量の式 (Euler 方程式または Navier-Stokes 方程式) を連立させることにより、圧力 p を消去して、速度 $\mathbf{u}$ のみを含む方程式に帰着させることができる。非圧縮流体における p は、質点力学で言

* 今井功「流体力学」(岩波書店 物理テキストシリーズ 9)

えば振り子の張力と同じく束縛力なので、最終的な運動方程式から消去できるのは当然である。ところが、圧縮性流体では、 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ という式が $\partial_t \rho$ を含む式に置き換わる。この場合、運動方程式の自由度（時間変化を考慮すべき変数）が増えているわけだから、 p を消去することはできない。振り子の針金をバネで置き換えたようなものであって、バネの張力は消去できず、Hooke の法則で定めなければならない。流体の場合も、同様に、 p を定めるために**状態方程式**を用いる必要がある。一般に、状態方程式は p と ρ 以外の熱力学変数（温度 T など）を含むから、その変数を定めるために、熱力学の知識が必要となる。方程式としては、連続の式（質量保存則）および運動量の式に加えて、新たにエネルギーの balance law を考え、これと状態方程式を連立して解くことになる。

熱力学は、永久機関の失敗の歴史の果てに、エネルギーの概念とともに生まれた（と私は思っている）。エネルギーの立場からは、たとえばバネの伸び ξ と張力 σ の関係は、ポテンシャル $U = U(\xi)$ を用いて

$$U(\xi + \Delta\xi) = U(\xi) + \sigma\Delta\xi \quad \text{すなわち} \quad \sigma = \frac{dU}{d\xi}$$

のような形にあらわされる。この考え方を拡張し、世の中に存在するあらゆる安定な物質を“温かさ・冷たさの影響を受けるバネ”に見立てて考察するのが熱力学である。この見方において、上記の U に相当するものを**熱力学ポテンシャル**あるいは**完全な熱力学関数**と呼ぶ。ここで“完全な”というのは、状態方程式を求めるために必要な情報がすべて含まれている（そこからすべて導出できる）という意味である。

系として、一定質量 m （または一定の物質質量 n モル）の流体を閉じ込めたものを考えよう。この系の熱力学状態は2つの変数（たとえば温度 T と体積 V ）で定まるものとする[†]。このような系について、代表的な熱力学ポテンシャルを4つ挙げる。

[†] じつはここで“流体”という限定が意味をもつ。弾性体だったら、 T と V が同じでも歪み状態が異なる場合があるので、それを反映するような変数をとらなくてはならない。また、電場や磁場のエネルギーとか化学反応とかがある場合は、それも含める必要があるが、そういう場合への拡張については熱力学の参考書を見てもらうことにして、ここでは T と V だけで熱力学状態が定まるような場合に限定して考える。

- 内部エネルギー $E = E(S, V)$
- エンタルピー $H = H(S, p)$
- Helmholtz の自由エネルギー $F = F(T, V)$
- Gibbs の自由エネルギー $G = G(T, p)$

ここで S はエントロピー[‡]、 p は圧力である。これらの熱力学ポテンシャルに対し、次の関係式が成り立つ：

$$dE = TdS - pdV \quad (*3)$$

$$dH = TdS + Vdp = d(E + pV) \quad (*4)$$

$$dF = -SdT - pdV = d(E - TS) \quad (*5)$$

$$dG = -SdT + Vdp = d(H - TS) \quad (*6)$$

式 (*3) は、熱力学第1法則、すなわち

$$dE = \text{熱} + \text{仕事}$$

をあらわすものと解釈できる。式 (*4)(*5)(*6) は、式 (*3) から **Legendre 変換**によって導かれる。

何かひとつ熱力学ポテンシャルが分かったとしよう。たとえば $F = F(T, V)$ が具体的に与えられれば、式 (*5) を用いて S および p を計算できる。なぜなら、式 (*5) を差分に直した式

$$F(T + \Delta T, V + \Delta V) = F(T, V) - S\Delta T - p\Delta V$$

において $(\Delta T, \Delta V) = (\text{微小}, 0)$ とすると

$$S = - \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{F(T + \Delta T, V) - F(T, V)}{\Delta T}$$

が得られるし、同様に $(\Delta T, \Delta V) = (0, \text{微小})$ とすることで p が求められるからだ。この計算は、偏微分の記号を用いると

$$S = - \frac{\partial F(T, V)}{\partial T}, \quad p = - \frac{\partial F(T, V)}{\partial V} \quad (*5')$$

のように書ける。偏微分を計算するときは、独立変数の組が何であるかを明記しなければならない（つまりカッコの部分は省略できない）。ただし、略記法として、何を固定した偏微分であるかを示すにとどめ、

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

のように書くことも多い。

[‡] カタカナで書くとエンタルピーと紛らわしいが、もともとの綴りは entropy, enthalpy で、全くの別物である。

おまけ

式 (*3) は、 dS について解いた形で

$$S = S(E, V), \quad dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV$$

のように書き直せる。さらに、Legendre 変換によって

$$d\Psi = d(S - \beta E) = -E d\beta + \frac{p}{T}dV \quad (\beta = 1/T)$$

が得られる (この $\Psi = \Psi(\beta, V)$ を **Massieu 関数** という)。

この $S = S(E, V)$ や $\Psi = \Psi(\beta, V)$ は、 $E(S, V)$ などと同じく熱力学ポテンシャルとなる。このことが**平衡系の統計力学**で重要な役割を果たしている。与えられた物質に対する状態方程式を理論的に求めたい場合、 $p = \dots$ の形の式を直接導くよりも、 $S = k_B \log W(E, V)$ などの熱力学ポテンシャルを経由する方法のほうが汎用性が高いからだ。

熱力学変数には、系の大きさによらない変数 (**示強変数**) と、系の大きさに比例する変数 (**示量変数**) の 2 種類がある。たとえば温度 T は示強変数、体積 V は示量変数である (40 度の湯 1 リットルと 40 度の湯 1 リットルを合わせると、体積は 2 リットルだが、温度は 80 度にはならず 40 度のまま)。圧力 p は示強変数、 S, V, E, F などは示量変数となっている。

流体力学では、たとえば系全体のエネルギーよりも、それぞれの微小部分におけるエネルギーを考えるほうが重要なので、示量変数を質量あたりに換算してあらわすほうが便利である。この補足資料では、 $s = S/m, e = E/m$ のように、質量あたりの量を小文字であらわすことにする[§]。ただし体積は、 V/m の代わりに、その逆数である密度 $\rho = m/V$ の形で扱う。

練習問題 4

式 (*3) は、内部エネルギー E の変化を dS と dV で表している。この式を、質量あたりの変数 ($e = E/m, s = S/m$) および密度 ρ を用いて書き直せ。

気体の状態方程式

熱力学ポテンシャルから状態方程式を導く例として、気体についての van der Waals の式について説

明する。Helmholtz の自由エネルギー F を用いると、気体 n モルに対する van der Waals の式は

$$F = F(T, V) \\ = -\frac{a'n^2}{V} - nc'_v T \log \frac{T}{T_0} - nR'T \log \left(\frac{V}{nb'} - 1 \right) \quad (*7)$$

と書ける。ここで R' はモルあたりの気体定数で、気体の種類によらず $R' = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ という値をもつ。他方、 c'_v および a', b' は気体の種類に応じた定数で、その意味はすぐあとで説明する。

式 (*5') を用いて、式 (*7) から状態方程式を導こう。まず、圧力 p は

$$p = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial V} = -\frac{a'n^2}{V^2} + \frac{nR'T}{V - nb'} \quad (*8)$$

のように求められる。これが、いわゆる **van der Waals の状態方程式** である。最初の a' の項は気体分子どうしのあいだにはたらく引力をあらわし、この項は p に対して負の寄与をもつ。また、 b' は分子の (モルあたりの) 体積であり、第 2 項の分母の $V - nb'$ は、分子が実際に動きまわられる空間の大きさをあらわしていると解釈できる。モルあたりの気体の体積 V/n が大きい極限では、 a' も b' も無視できて、この極限では、式 (*8) は **Boyle-Charles の法則**

$$p = \frac{nR'T}{V} \quad (*9)$$

に一致する。

他方、エントロピー S を計算すると

$$S = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} \\ = nc'_v \left(\log \frac{T}{T_0} + 1 \right) + nR' \log \left(\frac{V}{nb'} - 1 \right) \quad (*10)$$

となる。これから内部エネルギー E が

$$E = F + TS = -\frac{a'n^2}{V} + nc'_v T \quad (*11)$$

と求められ、さらに $\partial E(T, V)/\partial T = nc'_v$ つまり

$$E(T + \Delta T, V) = E(T, V) + nc'_v \Delta T$$

となる。こうして、 c'_v はモルあたりの**定積比熱** (V を固定したときの比熱) であることが分かる。体積 V

[§] 教科書の記号とは一致しないので注意すること。たとえば教科書 §49 の S は、このプリントでいう s に相当する。

が大きく式 (*11) の第 1 項が無視できる場合には、

$$E = nc_v' T \quad (*12)$$

が成り立つ。

おまけ

式 (*11) の $E = E(T, V)$ は熱力学ポテンシャルではないことに注意しよう。実際、式 (*11) から式 (*8) を導くのは不可能であり、その意味で情報が欠落している。しかしもちろん、式 (*10) を用いて $E = E(S, V)$ の形にすれば、これは立派に熱力学ポテンシャルとなる。

式 (*8) に戻り、この式を流体力学向けに $\rho = m/V$ で書き直してみよう。ただし、 m は気体 n モル (Avogadro 数 N_A を用いて個数に直すと $N_A n$ 個) の質量であり、分子 1 個の質量を m_0 とすると

$$m = m_0 N_A n \quad \text{したがって} \quad \rho = m_0 N_A \frac{n}{V}$$

のように n/V と関係づけられる。これを用いて式 (*8) から V を消去し、定数を適当に置き直すと

$$p = -a\rho^2 + \frac{\rho RT}{1 - b\rho} \quad (*8')$$

となる。ここで R は質量あたりの気体定数で、

$$R = \frac{R'}{m_0 N_A} = \frac{k_B}{m_0} \quad (*13)$$

のように R' と関係づけられる。なお k_B は R' を気体分子の個数あたりに換算したもの (すなわち $k_B = R'/N_A$) で、**Boltzmann 定数**と呼ばれる。

練習問題 5

体積 V の代わりに ρ を用いて式 (*9) を書き直せ。

練習問題 6

式 (*8') で温度 T は一定であるとして、 p と ρ の関係を示すグラフを作る。ただし、 p は ρ の単調増加関数でなければならないので、それを満たさない部分はグラフから除くことにする。

実際に式 (*8') をプロットし、グラフの形は温度 T によって異なること、特に、温度が低い場合には、グラフは 2 つの部分に分かれることを示せ。これらの 2 つの部分は、それぞれ何をあらわしているのか？

理想気体

理想気体とは、Boyle–Charles の法則 (*9) および式 (*12) に完璧に従うような理想的な気体のことである。流体力学の都合に合わせて、 ρ および e を用いて状態方程式を書くと

$$p = \rho RT \quad (*14)$$

$$e = c_v T \quad (*15)$$

となり、ここで R は式 (*13) で与えられる質量あたりの気体定数、また $c_v = c_v'/(m_0 N_A)$ は質量あたりの定積比熱である。

比熱には、定積比熱 c_v のほかに、**定圧比熱** c_p すなわち圧力を一定とし体積変化を自由とする条件下での比熱がある。定圧比熱 c_p は、エンタルピー h あるいは $h = H/m$ から

$$c_p' = \frac{1}{n} \frac{\partial H(T, p)}{\partial T}, \quad c_p = \frac{c_p'}{m_0 N_A} = \frac{\partial h(T, p)}{\partial T}$$

により得られる。理想気体では、式 (*14)(*15) から

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_p T, \quad c_p = c_v + R \quad (*16)$$

となることが容易に示される。

定圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (*17)$$

を**比熱比**という。空気の場合、ほぼ $\gamma = 1.4$ である。

練習問題 7

理想気体の c_v および c_p を、質量あたりの気体定数 R および比熱比 γ であらわせ。さらに、 e および h を R, γ, T であらわせ。

状態方程式 (*14)(*15) から $F = F(T, V)$ にさかのぼり (van der Waals の式で a' および b' をゼロに近付けた極限)、これからエントロピーを求めると

$$s = s_0 + c_v \log \frac{p}{p_0} - c_p \log \frac{\rho}{\rho_0} \quad (*18)$$

となる。式 (*18) を p について解くと、 γ を用いて

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right) \quad (4.3')$$

と書ける。特に、エントロピーが時間的にも空間的にも一定である場合には、式 (4.3') で $s = s_0$ として

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (4.5')$$

を得る。式 (4.5') を **Poisson の断熱関係式** という。この式と理想気体の状態方程式 (*14) を組み合わせ、気体を断熱圧縮させたり断熱膨張させたりしたときの温度変化を知ることができる。

練習問題 8

常温常圧の空気（比熱比 $\gamma = 1.4$ ）をディーゼルエンジンに吸い込み、断熱圧縮して体積を $1/15$ にすると、圧力と温度はどれくらいになるか、概算せよ。

対数微分

気体力学では、理想気体に関連して、式 (*14) のような積の形の式や、式 (4.5') のようなべきを含む式が頻繁に登場する。このような形の式を微分する際には**対数微分**を用いると便利である。

例として

$$z = kx^\alpha y^\beta \quad (x = x(t), y = y(t)) \quad (*19)$$

を t で微分することを考えよう（もちろん k, α, β は定数）。このまま微分を計算しようとするとかかなり面倒なことになる。しかし、両辺の対数をとって

$$\log z = \alpha \log x + \beta \log y + \text{const.}$$

としてから微分すると

$$\frac{\dot{z}}{z} = \alpha \frac{\dot{x}}{x} + \beta \frac{\dot{y}}{y} \quad (*20)$$

というシンプルな形になり、慣れれば一瞬で計算できる。これが対数微分である。

対数微分の変形として、式 (*19) で

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z$$

とした場合に Δz を Δx と Δy であらわすことを考えてみる。式 (*19) の両辺を $z_0 = kx_0^\alpha y_0^\beta$ で割ると

$$1 + \frac{\Delta z}{z_0} = \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha \left(1 + \frac{\Delta y}{y_0} \right)^\beta$$

となり、右辺を展開して 2 次の微小量を無視すると

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \alpha \frac{\Delta x}{x_0} + \beta \frac{\Delta y}{y_0}$$

という結果が得られる。両辺を Δt で割ると式 (*20) と本質的に同じ式になる。

圧縮性流体の方程式

圧縮性流体に対する方程式の基礎となるのは、質量・運動量・エネルギーに対する 3 つの収支釣り合い法則 (balance laws) である。さらに、未知数の数と方程式の数を一致させるために状態方程式と組み合わせる必要がある。普通は流体を理想気体と考え、状態方程式として式 (*14)(*15) を用いる。

粘性および熱伝導を含めて 3 つの balance laws を書くと、次のような方程式系になる：

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (*21a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \text{Div}(\rho u \mathbf{u}, \rho v \mathbf{u}, \rho w \mathbf{u}) \\ + \text{grad } p - \text{Div } \tau = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (*21b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \right] \\ + \text{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + p \mathbf{u} - \tau \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} \right] = 0 \end{aligned} \quad (*21c)$$

ただし $\text{Div } \tau$ はテンソル τ の発散、 $\tau \cdot \mathbf{u}$ はテンソル τ とベクトル $\mathbf{u}$ の内積であって、それぞれ

$$(\text{Div } \tau)_i = \sum_j \partial_j \tau_{ij}, \quad (\tau \cdot \mathbf{u})_i = \sum_j \tau_{ij} u_j$$

という成分をもつベクトルである。

式 (*21c) を導出するには、いつものように空間に固定された微小な検査体積を考え、そのなかを占める流体のエネルギー収支を考える。検査体積のなかの流体がもつエネルギーは

$$e \Delta m + \frac{\Delta m}{2} \mathbf{u}^2 = \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) \Delta V$$

で、 ΔV は時間によらないので、エネルギー収支は

$$\begin{aligned} [\rho (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)]|_{t+\text{dt}} \Delta V - [\rho (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)]|_t \Delta V \\ = \sum [\text{検査面を通じた出入り}] \end{aligned} \quad (*22)$$

と書ける。エネルギーの出入りとしては、今の場合

- 流体とともに流入するエネルギー (移流項)
- 仕事という形でのエネルギーの出入り
- 熱流という形でのエネルギーの出入り

を考えればよい。

まずは移流項を考える。たとえば㊦の面からは

$$\Delta m'_{\text{㊦}} = (\rho w)|_z \Delta t \Delta x \Delta y$$

だけの質量の流体が流入し、また質量 $\Delta m'$ の流体はエネルギー $(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2) \Delta m'$ をもつので、

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{㊦の面から流体} \\ \text{とともに流入す} \\ \text{るエネルギー} \end{array} \right] &= (\rho w)|_z \Delta t \Delta x \Delta y \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)|_z \\ &= [\rho w (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)]|_z \Delta t \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

と書ける。同じような式を他の面でも求めて合計し、向かい合う面どうしを組み合わせることで微分の形にする：

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{流体とともに流入} \\ \text{するエネルギー} \end{array} \right] &= - \left\{ \partial_x [\rho u (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)] + \partial_y [\rho v (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)] \right. \\ &\quad \left. + \partial_z [\rho w (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)] \right\} \Delta V \Delta t \quad (*23) \end{aligned}$$

仕事の項に関しては、検査面のところに“見えないピストン”のようなものを想像し、そのピストンを通じて働く力と、時間 Δt のあいだにピストンが動く変位ベクトルを考えればよい。それぞれの面にはたらく力は、たとえば㊥および㊦の面においては

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{\text{㊥}} &= + (p - \tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz})|_x \Delta y \Delta z \\ \Delta \mathbf{F}_{\text{㊦}} &= - (p - \tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz})|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

と書ける。符号が異なるのは面の向きが逆だからである。また“見えないピストン”の変位は $\mathbf{u} \Delta t$ で与えられる。この仕事によって流体に与えられるエネルギーを ΔW とすると、それぞれの面に対して

$$\Delta W = (\Delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})|_{\text{面の位置}} \Delta t$$

であり (内積のドットに注意)、たとえば㊥の面では

$$\Delta W_{\text{㊥}} = - \left(pu - \sum_i \tau_{xi} u_i \right) \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t$$

となる。6つの面すべてに対して仕事を計算し、向かい合う面どうしを組み合わせることで微分の形にすることで

$$\begin{aligned} [\text{仕事}] &= - \left[\sum_i \partial_i (p u_i) - \sum_i \sum_j \partial_i (\tau_{ij} u_j) \right] \Delta V \Delta t \\ &= - [\text{div}(\rho \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})] \Delta V \Delta t \quad (*24) \end{aligned}$$

を得る。式 (*23)(*24) をエネルギー収支の式 (*22) の右辺に代入し、全体を $\Delta V \Delta t$ で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることにより、式 (*25c) が得られる。

練習問題 9

式 (*21) を見ないで書き、それぞれの項の意味を説明せよ。さらに、太字ベクトルや div などの記号を用いずに、成分表示で式 (*21) を書き直せ。

粘性も熱伝導性も無視できる場合には、式 (*21) で $\boldsymbol{\tau}$ および $\mathbf{q}$ をゼロとすればよい：

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (*25a)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \text{Div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}, \rho v \mathbf{u}, \rho w \mathbf{u}) + \text{grad } p = \mathbf{0} \quad (*25b)$$

$$\partial_t [\rho (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2)] + \text{div} [\rho \mathbf{u} (e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2) + p \mathbf{u}] = 0 \quad (*25c)$$

練習問題 10

エネルギーの収支から式 (*25c) を直接導出せよ。

さらに、あとで便利のように、式 (*2) の Lagrange 微分 D_t を用いた形で式 (*25) を書き直す。まず式 (*25a) のなかにある積の微分を展開すると

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \mathbf{u}) &= \partial_x (\rho u) + \partial_y (\rho v) + \partial_z (\rho w) \\ &= (\partial_x \rho) u + \rho \partial_x u + \dots \\ &= \rho \text{div } \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \end{aligned}$$

となり、したがって式 (*25a) は

$$D_t \rho + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (*26a)$$

と書き直せる。続いて式 (*25b) のなかの積の微分を展開し、式 (*26a) と組み合わせることで整理すると

$$\rho D_t \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{0} \quad (*26b)$$

が得られる。さらに、式 (*25c) からは

$$\rho D_t e = -p \text{div } \mathbf{u} \quad (*26c)$$

という式が得られる。

練習問題 11

式 (*25) から式 (*26) を導出する過程を、ノートやプリントを見ずに自力で再現せよ。

おまけ

式 (*26b) は、少なくとも形の上では、ポテンシャルによる力を受けて運動する質点の運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } U$$

に類似しているの、 p をポテンシャルとしてとらえることができそうに思われる。実際、流体力学 I で学んだように、密度が一定で流れが定常であれば、式 (*26b) は

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

と書き直され、その“エネルギー積分”が

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (*27)$$

のように求められる (Bernoulli の定理)。式 (*27) を質点の運動方程式のエネルギー積分に見立てるなら、その意味では、確かに p/ρ はポテンシャルに対応する。さらに、重力を受ける流れでは、式 (*27) のカッコのなかに、重力のポテンシャルである gz という項が追加される。

しかし、圧縮性流体では、この話には修正が必要である。密度 ρ が定数でないため、 $(1/\rho) \text{grad } p$ を $\text{grad}(p/\rho)$ に置き換えることはできないからだ。その代わり、式 (*4) より

$$\text{grad } h = T \text{grad } s + \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

が成り立つので、もし等エントロピー流れに限定するなら

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } h \quad \text{したがって} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\text{grad } h$$

となり、その“エネルギー積分”として

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + h \right) = 0 \quad (*28)$$

が得られる。式 (*28) が圧縮性流体に対する Bernoulli の定理である[¶]。この式は、非粘性流体でのエネルギーの収支

[¶] カンニング事件で有名になった某質問掲示板で、Bernoulli の定理を用いた翼理論は間違いであるとする解答があり、その理由として「空気は圧縮性なので Bernoulli の定理は成り立たない」と書いてあった。こういうことを書く人は、流体力学をまともに理解できていないものと思われる。しかし困ったことに、その掲示板では、このインチキな解答に「ベストアンサー」のマークがついているのだ。

釣り合いの式 (*25c) から導出することができて、その意味で、確かにエネルギー保存則と結びついている。

音波

圧縮性流体の線形解析

非粘性の圧縮性流体の方程式 (*25) に対し、微小振幅の場合の解を求めよう。なお、流体は理想気体であるものと仮定し、状態方程式として式 (*14)(*15) を用いる。また、簡単化のため、1 次元の系で考え、 ∂_y および ∂_z はゼロとする。

出発点として一様静止状態

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad u = 0$$

をとり (p_0 も ρ_0 も定数)、ここからの微小な変動を考えて、振幅パラメータ ε により

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \cdots \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \cdots \\ T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots \\ u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots \end{aligned}$$

のように展開する。この展開を式 (*25) に代入し、 ε の 2 次以上の項を無視すると

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \partial_x u_1 = 0 \quad (*29a)$$

$$\rho_0 \partial_t u_1 + \partial_x p_1 = 0 \quad (*29b)$$

$$\partial_t (\rho_0 e_1 + \rho_1 e_0) + (\rho_0 e_0 + p_0) \partial_x u_1 = 0 \quad (*29c)$$

という線形の方程式系が得られる。さらに、状態方程式 (*14)(*15) からは

$$p_0 = \rho_0 T_0, \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{T_1}{T_0} \quad (*29d)$$

$$e_0 = c_v T_0, \quad e_1 = c_v T_1 \quad (*29e)$$

という式が得られる。

方程式系 (*29) は 5 つの変数に対する 5 つの方程式なので、変数の数と方程式の数は合っている。ここから変数を減らしていくことを考えよう。どの変数を残すかについては選択の余地があるが、今回は T_1 と e_1 を消去し、 p_1 , u_1 , ρ_1 を残すことにする。

まず、方程式 (*29c) に e_1 の時間微分が含まれるので、式 (*29e) を用いて T_1 に書き換える。次に、式 (*29d) を用いて T_1 を p_1 に書き換え、さらに理想気体の比熱に関する関係式 (*16) を利用して係数を整理する。その結果、式 (*29c) は、比熱比 γ を用いて

$$\partial_t p_1 + \gamma p_0 \partial_x u_1 = 0 \quad (*29c')$$

と書き直せる。

式 (*29a)(*29b)(*29c') は定数係数の線形同次方程式なので、Fourier モードの方法で解ける。そこで

$$(p_1, u_1, p_1) = (\hat{p}, \hat{u}, \hat{p}) e^{i(kx - \omega t)} \quad (*30)$$

と置いて式 (*29a)(*29b)(*29c') に代入すると、

$$\omega \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0^{-1} \\ 0 & \gamma p_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{p} \end{bmatrix} \quad (*31)$$

という固有値問題になる。固有値 ω を求めると

$$\omega = \begin{cases} 0 \\ \pm k \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \pm c_0 k \end{cases} \quad (*32)$$

となり、速度の次元をもつ定数 $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ が現れる。あとで示すように、 c_0 は微小な圧力変動が流体中を伝わっていく速度であり、**音速**と呼ばれる。

練習問題 12

固有値問題 (*31) を自力で解いて固有値 (*32) を求め、さらに、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。なるべく次元が合うようにすること。

式 (*32) に現れる 3 つの振動数のうち、振動数 $\omega = 0$ に対応するモードは、直感的に言えば、暖かい流体と冷たい流体が静かに接している状態を示す解である（熱伝導などは無視していることに注意）。このモードは、圧力変動や流速の変動を伴わない。温度場 T_1 は空間的に不均一（非一様）であり、この温度分布が、時間変化することなしに定常的に存在し続ける。また、エントロピーの変動は、式 (*18) より

$$s_1 = c_v \frac{p_1}{p_0} - c_p \frac{\rho_1}{\rho_0} = -R \frac{p_1}{p_0} + c_p \frac{T_1}{T_0} \quad (*33)$$

であり、ここで考えている $\omega = 0$ のモードでは $p_1 = 0$ だから、 s_1 は T_1 に伴って空間的に非一様となるが時間的には変化しないことが分かる。

他方、 $\omega = \pm c_0$ のモードは圧力変動を伴うモードであり、この圧力変動が速度 $\pm c_0$ で伝播する。圧力変動に伴って速度や温度も変動する。また、式 (*33) を用いてエントロピーの変動を計算してみると、 $s_1 = 0$ であり、このモードではエントロピーが変動しない（等エントロピーである）ことも分かる*。

なお、音速が定数 c_0 になるのは、あくまで線形解析の結果である。有限振幅波では、音速は定数ではなく

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = c_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (*34)$$

のようになる（理想気体の場合）。

さらに、理想気体では、状態方程式 (*14) と音速の式 (*34) から

$$c = \sqrt{\gamma R T} \quad (*34')$$

が成り立つ。すなわち理想気体の音速 c は温度 T と一対一に対応する†。

練習問題 13

理想気体の内部エネルギー e およびエンタルピー h を音速 c であらわせ。

おまけ

理想気体以外も含めた一般の場合には、式 (*34) が成り立つとは限らず、代わりに

$$c = \sqrt{\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho}} \quad (*35)$$

が成り立つ。実際、理想気体の式 (4.3') を式 (*35) に代入すると、理想気体の音速の式 (*34) が得られる。

* このことから振り返って考えると、変数を減らすときに、残すべき変数として ρ や T ではなく s, p, u を選んでおけば式が簡単になったはずだ、ということが分かる。

† 温度 T の系では、分子の熱運動の速さは $\sqrt{k_B T / m_0}$ くらいである。式 (*34') に示されている理想気体の性質は、理想気体では分子の熱運動の速さがほぼそのまま音速に反映される、というように解釈できる。

練習問題 14

速度 u_0 の一様流があるような状態

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad u = u_0 \neq 0$$

に対する微小攪乱について、次のことを示せ:

- 式 (*29) に相当する式を導出すると、時間微分 ∂_t が $\partial_t + u_0 \partial_x$ に置き換わった式になる。
- エントロピーの変動は

$$(\partial_t + u_0 \partial_x) s_1 = 0 \quad (*36)$$

という式に従う。すなわち、単に速度 u_0 で流されるだけで、それ以上の時間変化はない。

- 圧力変動は速度 $u_0 \pm c_0$ で伝播する。つまり、速度 u_0 で流されつつ、流体に対して相対速度 $\pm c_0$ で伝わる。

波動方程式

3 つの方程式 (*29a)(*29b)(*29c') を連立して 3 変数の線形解析をおこなう代わりに、 u_1 や T_1 を消去して p_1 だけの方程式に直すこともできる。2 次元以上の場合、こちらの形式のほうが便利である。

1 次元の場合、 p_1 以外の変数を消去すると

$$\partial_t^2 p_1 - c_0^2 \partial_x^2 p_1 = 0. \quad (*37)$$

という式になる。これは**波動方程式**[‡]と呼ばれている。

練習問題 15

波動方程式 (*37) の導出過程を示せ。

練習問題 16

3 次元の圧縮性流体の方程式で、一様静止状態に対する攪乱を考え、圧力以外の変数を消去すると

$$\partial_t^2 p_1 - c_0^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) p_1 = 0 \quad (*38)$$

という 3 次元の波動方程式になることを示せ。

[‡] 名前は同じ波動方程式でも、Schrödinger の波動方程式とは別のものである。紛らわしい場合は「音波の波動方程式」とでも言うておけば間違うことはないだろう。

おまけ

もし初期条件で $s = s_0$ すなわち $s_1 = 0$ であるなら、別の道筋で波動方程式を導くこともできる。式 (*29a)(*29c') から u_1 を消去すると $\partial_t s_1 = 0$ という式が出てくるので、これと初期条件から、時間が経過しても常に $s = s_0$ が成立する。したがって Poisson の関係式 (4.5') が成り立つので、これと式 (*29a)(*29b) を組み合わせればよい。

波動方程式の解

1 次元波動方程式 (*37) の一般解は、 F および G を任意の 1 変数関数として[§]

$$p_1 = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t) \quad (*39)$$

と書けることが知られており、**D'Alembert の解**と呼ばれている。式 (*39) が波動方程式 (*37) を満たすことは、直接代入すれば確認できる。しかし、何でも天下りばかりでは良くないので、D'Alembert の解 (*39) を、波動方程式 (*39) の演算子の因数分解によって発見法的に求めてみよう。

波動方程式 (*39) の解を求めるためのヒントとして

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

という常微分方程式の一般解を演算子の因数分解で求める方法を参考にする。この常微分方程式は

$$\left(\frac{d}{dt} + 2 \right) \left(\frac{d}{dt} + 3 \right) y = 0$$

と因数分解できて、その一般解は

$$\begin{aligned} y &= [\dot{y} + 2y = 0 \text{ の解}] + [\dot{y} + 3y = 0 \text{ の解}] \\ &= Ae^{-2t} + Be^{-3t} \end{aligned} \quad (*40)$$

となる。これと同じく、波動方程式 (*37) は、微分演算子を因数分解した形で

$$(\partial_t + c_0 \partial_x)(\partial_t - c_0 \partial_x)p_1 = 0$$

のように書けて、しかもふたつの演算子は（定数係数なので）可換である。したがって、式 (*40) からの類

[§] 常微分方程式の一般解には任意定数が現れるのに対し、偏微分方程式の一般解には任意関数が現れる。なお、言うまでもないことであるが、この F や G は式 (*5)(*6) の自由エネルギーとは別物である。記号が重複してしまっているが、文脈で区別してほしい。

推により、

$$(\partial_t + c_0 \partial_x) p_R = 0 \quad (*41)$$

$$(\partial_t - c_0 \partial_x) p_L = 0 \quad (*42)$$

の解を求めれば[¶]、その線形結合によって式 (*37) の解が与えられるものと期待できる。

まずは方程式 (*41) について考えよう。時刻 t での p_R の波形が分かっているものとして、微小時間 Δt が経過したあとの解を求めると

$$\begin{aligned} p_R(x, t + \Delta t) &= p_R(x, t) + \frac{\partial p_R}{\partial t} \Delta t \\ &= p_R(x, t) - c_0 \frac{\partial p_R}{\partial x} \Delta t \\ &= p_R(x - c_0 \Delta t, t) \end{aligned} \quad (*43)$$

となり^{||}、 (x, t) 平面上で $x = c_0 t + \text{const.}$ を満たす線 (**特性線**) にそって p_R は一定であることが分かる。したがって、方程式 (*41) の一般解は

$$\begin{aligned} p_R(x, t) &= p_R(x - c_0 t, 0) \\ &= F(x - c_0 t) \end{aligned} \quad (*44)$$

すなわち右向きに速度 c_0 で進む波となる。同様に考えて、方程式 (*42) の一般解は、

$$p_L(x, t) = G(x + c_0 t) \quad (*45)$$

という、左向きに進む波となる。式 (*44) と式 (*45) の重ね合わせにより D'Alembert の解 (*39) を得る。

練習問題 17

波動方程式 (*37) において、初期条件を

$$p_1|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_1|_{t=0} = 0 \quad (*46)$$

とした場合の解を求めよ。(ヒント: 式 (*29c') により、2 番目の条件は $(\partial_t p_1)|_{t=0} = 0$ を意味する。)

波の伝播の様子を視覚的に把握するには、時間軸を導入して (x, t) 平面で図示する方法がよく用いられ

[¶] 添字の R は Right, L は Left の略。これらの添字の意味は、解を見れば分かるはず。

^{||} 式 (*43) では Δt を微小として 1 階微分までの Taylor 展開を考えたが、講義で示したように、すべての n 階微分の項を考慮して式を書き下すことも可能である。これにより式 (*44) が直接導出できる。

る。式 (*44) に従うモード (“右向きモード”) では、 p が一定値をとる線は $x - c_0 t = \text{const.}$ という直線になる。この直線を、このモードの**特性線**という。また、“左向きモード”の特性線は $x + c_0 t = \text{const.}$ という直線である。

練習問題 18

波動方程式 (*37) において、初期条件が

$$p_1|_{t=0} = \varphi(x) = Ae^{-(x/L)^2}, \quad (\partial_t p_1)|_{t=0} = 0$$

と与えられたとする。時間の範囲を $0 \leq t \leq 3L/c_0$ とし、 (x, t, p_1) の 3 変数を軸とする 3 次元的なグラフを用いて、波形の変化していく様子を図示せよ。

D'Alembert 解では、正方向の波・負方向の波のそれぞれにおいて、波形は時間変化することなく一定の形と伝播速度を保ったまま進んでいく。この点は、あとで述べる非線形の波とは大きく異なっている。

おまけ

式 (*37) の他の解法として、**変数分離法**が役に立つ場合も多い。特に何らかの境界条件によって領域が限定されている場合に有効である。また、D'Alembert 解は 1 次元でしか使えないが、変数分離法は 2 次元以上の場合にも拡張できるという利点がある。

変数分離法では、解の基底を $p = F(x)G(t)$ のように置いて式 (*37) に代入する。整理すると

$$\frac{F''}{F} = c_0^{-2} \frac{G''}{G}$$

となり、この式の左辺は t に依存せず右辺は x に依存しないので、両方とも定数でなければならない。この定数を $-\alpha^2$ と置き (本当は $\pm\alpha^2$ だが、実際に試してみると正のほうは自明解しか得られない)、2 つの常微分方程式

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \alpha^2 F = 0 \quad (*47)$$

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \omega^2 G = 0 \quad (\omega = c_0 \alpha) \quad (*48)$$

に分離する。この常微分方程式を解いて、境界条件を満たすような解を求め、得られた解 (**固有関数**あるいは**固有振動モード**) に順番に番号をつけて、もとの波動方程式 (*37) の一般解を

$$p_1 = \sum_k a_k F_k(x) G_k(t) \quad (*49)$$

のような線形結合の形で構成すればよい。

1 次元の場合、変数分離で得られる解は三角関数の積の形をしている。これを積和公式で書き直すと、D'Alembert 解の形になることが確認できる。

3 次元の波動方程式 (*38) では、 $p_1 = \varphi(x, y, z)T(t)$ と置いて変数分離すると、

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \varphi + \alpha^2 \varphi = 0 \quad (*50)$$

という方程式 (**Helmholtz 方程式**) が出てくる。Helmholtz 方程式 (*50) は偏微分方程式なので、これを解くには、境界条件に適した座標系を用いて再度変数分離をおこなう必要がある。実際の問題でよく出てくるのは円柱座標や球座標を用いた変数分離であり、これにより、Bessel 関数など、いわゆる**特殊関数**の方程式が登場することになる。

浅水波

いわゆる水の波 (水面重力波) において、波長に比べて水深が小さいような波を**浅水波**という。目に見えない音波について学ぶ際には、目に見える浅水波と対応させて考えると理解しやすい部分がある。このような対応が可能なのは、浅水波の方程式が、気体中の音波の方程式とよく似ているためである。

水平方向に x 軸を、鉛直上向きに z 軸をとり、浅水波の方程式を書き下そう。浅水波においては、 x 方向の速度について

$$u = u(x, z, t) \simeq \bar{u}(x, t)$$

が成り立つ。水底から水面までの高さを $h = h(x, t)$ とすると**、質量についての balance law は

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{u}) = 0 \quad (32.5')$$

と書ける。また、Navier-Stokes 方程式の x 成分の式で、圧力を $p \simeq \rho g(z - h)$ で近似することにより、

$$(\partial_t + \bar{u}\partial_x)\bar{u} = -g\partial_x h \quad (32.4')$$

という式が得られる (g は重力加速度)。

浅水波の方程式 (32.4')(32.5') の線形解析から、波の進む速さが

$$c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (*51)$$

** エンタルピーと記号が重複してしまうが、文脈で区別する。
また、この h は、教科書の図 32.1 における $h + \eta$ に相当する。教科書の h にあたるものは、このプリントでは h_0 と書くことにする。

で与えられることが分かる。また、 h_1 が

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \partial_x^2) h_1 = 0 \quad (*52)$$

という波動方程式に従うことも示せる。

練習問題 19

浅水波の方程式 (32.4')(32.5') において、一様静止状態に対する線形解析をおこない、波の速さが (*51) で与えられることを示せ。

練習問題 20

浅水波の方程式 (32.4')(32.5') の線形解析において、 h_1 以外の変数を消去すると、式 (*52) が得られることを示せ。

有限振幅の波

1 次元の有限振幅波の方程式

有限振幅の波の方程式では非線形の効果が現れる。気体中の圧力波では、圧力変動に伴い温度 T が変化するため、式 (*34) により音速が変化し、これにより圧力波の伝播が影響を受ける。また、圧力変動により流れが発生し、これもまた圧力変動の伝播に影響を与える。また浅水波でも事情は同じである。

こういう場合、はじめから流れを考慮して Lagrange 微分で扱うと見通しがよい。1 次元の気体の流れの場合、式 (*26) より

$$D_t \rho + \rho \partial_x u = 0 \quad (*53a)$$

$$\rho D_t u + \partial_x p = 0 \quad (*53b)$$

$$\rho D_t e + p \partial_x u = 0 \quad (*53c)$$

となる。なお、1 次元なので $D_t = \partial_t + u \partial_x$ である。さらに式 (*53c) を s で書き直す。式 (*3) より

$$\frac{De}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} - p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

となることを用いると、式 (*53) は

$$D_t \rho + \rho \partial_x u = 0 \quad (49.1')$$

$$D_t u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0 \quad (49.2')$$

$$D_t s = 0 \quad (49.3')$$

のように書き直せる。

式 (49.1')-(49.3') をさらに簡単化するにはどのような条件を追加したらよいか考えよう。初期条件で s が場所によらず一定値 ($s = s_0 (= \text{const.})$) だったとすると、式 (49.3') より、時間がたっても s は s_0 のままである (このような流れを**等エントロピー流れ**という)。さらに、気体が理想気体だとすると、このことと $s = s_0$ から、 p と ρ のあいだには Poisson の断熱関係式 (4.5') が成り立つ。このことを用いて、式 (49.1')-(49.3') をさらに簡単化できる。

理想気体の等エントロピー流れでは、Poisson の断熱関係式 (4.5') を用いて、 p または ρ のどちらかを消去することができる。どちらを消去してもよいが、ここでは p の微分を消去することにしよう。すると、式 (49.1')(49.2') は

$$\begin{aligned} D_t \rho + \rho \partial_x u &= 0 \\ D_t u + \frac{\gamma p}{\rho^2} \partial_x p &= 0 \quad \left(\frac{\gamma p}{\rho^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \rho^{\gamma-2} \right) \end{aligned}$$

のように書き直せる。この方程式は、非線形ではあるが、差分化して ($\Delta \rho, \Delta u$) を未知数と考えると線形同次と見ることができる。このことを形のうえではっきりさせるために、行列を用いて

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} + A \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho \\ \gamma p / \rho^2 & u \end{bmatrix} \quad (*54)$$

のように書いてみよう。力学などで習った線形同次の方程式の解法から類推して考えると、式 (*54) を固有値問題に持ち込むのが良さそうである。今の場合、 A の**左固有ベクトル**、すなわち

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} A = \alpha \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \quad (*55)$$

を満たす $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$ を使うとうまくいく*。具体的に固有値と固有ベクトルを求めると

$$\alpha = u \pm c, \quad \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = [\pm c / \rho \quad 1] \quad (*56)$$

となり、ここで c は密度 ρ での**音速**であって式 (*34) で与えられる。なお、固有ベクトルには任意のスカラーを掛けてよいはずであるが、ここでは、後の計算

* 左固有ベクトルを求める代わりに、普通の固有ベクトル (右固有ベクトル) を求めて逆行列をとってもよい。

がうまくいくように (式の展開を先読みして)、あえて式 (*56) のような形を選んでおくことに注意しておく。

こうして得られた左固有ベクトルを式 (*54) に左から掛けると

$$\pm \frac{c}{\rho} \partial_t \rho + \partial_t u + (u \pm c) \left(\pm \frac{c}{\rho} \partial_x \rho + \partial_x u \right) = 0 \quad (*57)$$

となる。このなかの $(c/\rho) \partial_t \rho$ および $(c/\rho) \partial_x \rho$ という項に着目しよう。式 (*34) より

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

であり、この式の対数微分から

$$\frac{c}{\rho} \partial_t \rho = \frac{2}{\gamma-1} \partial_t c, \quad \frac{c}{\rho} \partial_x \rho = \frac{2}{\gamma-1} \partial_x c$$

となることが分かる。これを式 (*57) に代入して

$$F = u + \frac{2c}{\gamma-1}, \quad G = u - \frac{2c}{\gamma-1} \quad (*58)$$

と置き、

$$\partial_t F + (u+c) \partial_x F = 0 \quad (*59)$$

$$\partial_t G + (u-c) \partial_x G = 0 \quad (*60)$$

を得る。

練習問題 21

浅水波の方程式 (32.4')(32.5') から出発して、式 (*59)(*60) を導け。導出手順のどこが気体の場合と同じでどこが違うのかをはっきりさせること。

式 (*59) は、波の速度が定数 c_0 ではなく $u+c$ という変数であることを除けば、式 (*41) と同じ形をしている。実際、式 (*59) より

$$\begin{aligned} F(x, t + \Delta t) &= F(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t \\ &= F(x, t) - (u+c) \frac{\partial F}{\partial x} \Delta t \\ &= F(x - (u+c) \Delta t, t) \end{aligned} \quad (*61)$$

となることが示され、これを式 (*44) と同様に考えると、 F の各点の値は速度 $u+c$ で進むことが分かる。同様に、式 (*60) は、 G が速度 $u-c$ で進んでいく

ことを示している。速度 $u \pm c$ はもちろん定数ではなく、 F と G の関数である。特に、 F および G を式 (*58) のように定めた場合†

$$u = \frac{1}{2}(F + G), \quad c = \frac{\gamma - 1}{4}(F - G)$$

となり、したがって $u \pm c$ は F, G とともに変化する。

式 (*61) の結果を (x, t) 平面上にあらわしてみると、 (x, t) 平面上の $dx/dt = u + c$ となる線（**特性線**）にそって F の値は一定となることが分かる。また、 G の値は、 $dx/dt = u - c$ となる特性線にそって一定となることが分かる。このような F および G を **Riemann 不変量**という。線形の波動方程式では特性線は互いに平行だったが、式 (*59)(*60) の特性線は互いに平行とは限らないため、波は時間経過とともにしだいに形を変えていく。特性線が扇状に広がっていく場合には、波の勾配はしだいにゆるやかになる。逆に、特性線が収束に向かうならば、波はしだいに急峻化し、ついには**衝撃波**が発生することになる。

練習問題 22

比熱比 γ の理想気体について 1 次元の等エントロピー流れを考える。初期条件を

$$p|_{t=0} = p_0 + A \exp(-\alpha^2 x^2), \quad u|_{t=0} = 0$$

としたとき (A は有限)、時間の経過とともに圧力の波形はどのように変化するか? (ヒント: まず F と G に書き直す。次に、波が分かれたあとの挙動について、プロジェクトで見た動画を思い出しながら、特性線を描いて考察する。)

衝撃波

静止した流体のなかを有限振幅の圧縮波が進んでいく場合、既に見たように、圧力の波形がしだいに急峻化し、ついには**衝撃波**が発生する。この衝撃波は、速さ U_s で流体のなかを進んでいく。

静止した流体に向かって超音速旅客機などの物体

が速さ U_s で進んでいく場合も、教科書の図 41.7, 図 41.10, 図 49.1 にあるように、やはり物体前方に衝撃波が発生する。物体から見ると、この衝撃波は一定の位置に静止しているので、**定在衝撃波**と呼ばれる。静止流体中を速さ U_s で左向きに進む進行衝撃波は、衝撃波に焦点を合わせたカメラのフレーム（座標枠）から見ると、流体が右向きに速さ $u_1 = U_s$ で向かってくる場合の定在衝撃波と等価である。

おまけ

定在衝撃波に似たものが、水道の水を流しの底の平らな板に当てたときに観察される。この場合、流れの減速は、物体によって起きるのではなく流れが半径方向に広がることによって起きるのだが、とにかく速度が急に变化し水面が階段状になる箇所ができる。このような、定在衝撃波に相当する急激な水面変化は、**跳水**と呼ばれている。ちなみに、進行衝撃波に相当するもの（津波やボアなど）については**段波**という用語が用いられる。

衝撃波の内部では速度や温度の勾配が非常に大きい。ため、粘性応力や熱流が無視できないような領域を含む。このような系では、もはや等エントロピーの仮定は妥当とは言えず、粘性を含む収支釣り合い法則、すなわち式 (*21) に戻って考えなければならない。

簡単化のため、例によって 1 次元に限定する。まずは練習用の例題として、圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (*21) の簡略版である **Burgers 方程式**

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_x^2 u \quad (*62)$$

から始めよう。静止した気体のなかを左向きに速さ U_s (速度 $-U_s$) で進む進行衝撃波を想定し、また衝撃波に対する気体の相対速度を $\tilde{u}$ として、

$$u = U_s + \tilde{u}(\xi), \quad \xi = x - U_s t \quad (*63)$$

と置いて式 (*62) に代入する。境界条件は

$$u|_{\xi=+\infty} = u_2 \neq 0, \quad u|_{\xi=-\infty} = 0 \quad (*64)$$

とする。多少の計算のあと、

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}^2 - \nu \frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right) = 0 \quad (*62')$$

という ODE が得られるので、これを解けばよい。

† Riemann 不変量の定め方には多少の任意性があり、たとえば式 (*58) の代わりに $F = u + 2(c - c_0)/(\gamma - 1)$ とか $F = 2c + (\gamma - 1)u$ などと置くこともできる。しかしとにかく $u \pm c$ が F と G であらわされることに変わりはない。

式 (*62') は $\partial_\xi(\text{なんとか}) = 0$ の形なので、カッコの中身は全領域で一定である。これと境界条件から

$$\frac{1}{2}\tilde{u}_1^2 = \frac{1}{2}\tilde{u}_2^2 \quad (\tilde{u}_1 = U_s, \quad \tilde{u}_2 = U_s + u_2)$$

という式を得る (ここで ν を含む項が消えるのは、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ で u が式 (*64) に収束し $\partial_\xi u \rightarrow 0$ となることによる)。この式から、 u_2 と U_s の関係が

$$\tilde{u}_2 = -U_s, \quad u_2 = -2U_s (< 0) \quad (*65)$$

のように得られる。さらに、常微分方程式 (*62') を解くことにより、 $\delta_s = 2\nu/U_s$ として、解が

$$u = U_s \left(1 - \tanh \frac{x - x_0 - U_s t}{\delta_s} \right) \quad (*66)$$

のように求められる。式 (*66) は、厚さ δ_s 程度の領域を境に、 u が急に変化する様子をあらわしており、衝撃波をあらわす解となっている。

練習問題 23

式 (*66) のグラフを図示し、 ν の大きさによる違いについて考察せよ。

Burgers 方程式の解から次のようなことが分かる：

- 衝撃波の速度 U_s は、 ν とは無関係であり、それ以外の定数 (境界条件など) で決まる。
- 衝撃波の厚さ δ_s は、 ν に比例する。

この結果を圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (*21) に読み替えると、衝撃波の速度 U_s は粘性と無関係に決まる一方、衝撃波の厚さは粘性係数が小さいほど薄くなるということになる。

続いて式 (*21) の解析に移る。いちいち式 (*63) のような変数変換をするのも面倒なので、進行衝撃波は最初から定在衝撃波に読み替えて考えることにしよう。これにより $\partial_t = 0$ とできるので、式 (*21) は

$$\partial_x(\rho u) = 0 \quad (*67a)$$

$$\partial_x(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) = 0 \quad (*67b)$$

$$\partial_x \left[\rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + (p - \tau_{xx})u + q_x \right] = 0 \quad (*67c)$$

と書き直せる。ここで

$$\tau_{xx} = \mu' \partial_x u = \frac{4}{3} \mu \partial_x u, \quad q_x = -\lambda \partial_x T$$

である。

衝撃波の前後には、衝撃波内部での急勾配とは比べものにならないほど勾配が平坦な領域がある。これらの領域では τ_{xx} も q_x も (∂_x を含むので) ゼロと見なしてよい。定在衝撃波の上流側 (低圧側) を領域 1, 下流側 (高圧側) を領域 2 としよう。式 (*67) は $\partial_x(\text{なんとか}) = 0$ の形なので、さっきと同様に考えて

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (41.13)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (41.14)$$

$$\rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 + p_1 u_1 = \rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 + p_2 u_2 \quad (41.15)$$

という関係式が得られる。ここで u_1 は上流側の流速、すなわち定在衝撃波に向かってくる流体の速度である。進行衝撃波に読み替えると、 u_1 は、静止流体中を進む衝撃波の速さ U_s と表裏一体である。

衝撃波の強さの尺度として、領域 1 (上流・低圧側) の圧力 p_1 と領域 2 (下流・高圧側) の圧力 p_2 の比をとる。以下では、式 (41.13)(41.14)(41.15) に基づき、衝撃波の強さ p_2/p_1 と衝撃波の進む速度 U_s とを互いに関係づける (一方を他方であらわす) 問題を考えてみよう。これにより、たとえば飛行機がどれくらいのときに、どんな強さの衝撃波が生じるか、計算できることになる。

まず式 (41.14) の両辺を式 (41.13) で割り、式 (*34) を用いて p/ρ を c で書き換えると

$$u_1 + \frac{c_1^2}{\gamma u_1} = u_2 + \frac{c_2^2}{\gamma u_2} \quad (41.14')$$

という関係式が得られる。同様に、式 (41.15) の両辺を $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ で割って

$$h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (41.16)$$

を得る。式 (41.16) は、 h を c で書き直して

$$\frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2} \quad (*68)$$

のように書き直せる。式 (41.14')(*68) から c_2 を消去し、 u_2 について解くと ($u_1 \neq u_2$ として)

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} M_1^{-2} \quad (*69)$$

という式が得られる。ただしここで M_1 は

$$M_1 = \frac{|u_1|}{c_1} = \frac{U_s}{c_1} \quad (*70)$$

で定められる無次元パラメータで、衝撃波の **Mach 数**と呼ばれる[‡]。

衝撃波の Mach 数 M_1 は圧力比 p_2/p_1 と一対一の対応関係にあることを示そう。式 (41.14) を p_2 について解き、式 (41.13) および式 (*69) を用いて整理する。多少の計算により

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (*71)$$

という関係式が得られる。この関数は明らかに単調増加関数であり、したがって M_1 と p_2/p_1 は一対一に対応する。

少なくとも通常の気体においては、衝撃波は圧縮波 ($p_2/p_1 > 1$) としてしか存在できない。有限振幅の圧力波でどういう場合に急峻化が起きるか考えると、たしかに $p_2 > p_1$ となるべきである。圧力比が $p_2/p_1 > 1$ となる必要十分条件は、式 (*71) より

$$M_1 > 1 \quad \text{すなわち} \quad U_s > c_1 \quad (*72)$$

である。このことは、定在衝撃波の上流側は必ず超音速であること、また静止流体中を飛行する物体によって進行衝撃波ができるのは物体の速度が音速を超えた場合であることを示している。

式 (*69)(*71) から M_1 を消去し、

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma+1 + (\gamma-1)p_2/p_1}{\gamma-1 + (\gamma+1)p_2/p_1} \quad (41.20')$$

を得る。さらに ρ_2/ρ_1 や T_2/T_1 を p_2/p_1 であらわす式も導出できる。式 (41.20') をはじめとするこれらの関係式を **Rankine-Hugoniot 関係式**という。

練習問題 24

収支釣り合い法則の形で書かれた圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (*21) から関係式 (41.13)-(41.15) を経て Rankine-Hugoniot 関係式 (41.20') を導出する過程を、ノートや資料を見ずに自力で再現せよ。

[‡] 水の波の場合は、Mach 数に相当するものは $u/\sqrt{gh}$ であり、**Froude 数**と呼ばれる。

おまけ

式 (*68) は、衝撃波前後の状態を (c, u) 平面上の点として図示すると、どちらも

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (*73)$$

という同じ楕円のうえの点となることを示している。この楕円と直線 $u = c$ ($M = u/c = 1$) との交点を (c_*, c_*) とすると、多少の計算の後、

$$u_1 u_2 = c_*^2 \quad (*74)$$

という関係式が得られる。式 (*74) を **Prandtl の関係式**という。この関係式と (c, u) 平面での図を見比べることにより、定在衝撃波の上流側が超音速 ($u/c > 1$) である以上、下流側は亜音速 ($u/c < 1$) であることが分かる。

準 1 次元流れ

断面積がゆるやかに変化する管内の流れを考えよう。管にそって x 軸をとり、位置 x での管の断面積を $A = A(x)$ とする。速度の向きはほぼ x 軸に平行であり、速度の大きさは (y, z) によらないものと考えて、

$$u = u(x, y, z, t) \simeq \bar{u}(x, t)$$

と近似する。以下では、簡単化のため、 $\bar{u}$ を単に u と書くことにする。

流れの支配方程式のうち、運動量やエネルギーについては、普通の 1 次元流れと同じように式 (49.2') および式 (49.3') を適用してよい。しかし、質量保存については、 A を考慮した balance law すなわち

$$\partial_t(\rho A) + \partial_x(\rho u A) = 0 \quad (*75)$$

を用いる必要がある。

流れの方向を $u > 0$ とし、定常流 ($\partial_t = 0$) について考えよう。まず、式 (*75) から、対数微分の形で

$$\frac{\partial_x \rho}{\rho} + \frac{\partial_x u}{u} + \frac{\partial_x A}{A} = 0 \quad (*76)$$

を得る。運動量の式 (49.2') は

$$u \partial_x u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p \quad (*77)$$

となる[§]。エントロピーについては、式 (49.3') より

$$u \partial_x s = 0 \quad (*78)$$

[§] 式 (*77)(*78) から Bernoulli の式 (*28) が導ける。

となり、 $u \neq 0$ だから、等エントロピー流れである。したがって Poisson の関係式 (4.5') が成り立ち、 ρ も p も c に関係づけられる。どれをどれであらわしても良いが、特に p について $\partial_x p = c^2 \partial_x \rho$ が成り立つので、これと式 (*77) から、式 (*76) の最初の項が

$$\frac{\partial_x \rho}{\rho} = \frac{\partial_x p}{\rho c^2} = -\frac{u \partial_x u}{c^2}$$

のように書き直せる。これを式 (*76) に代入すると、

$$(1 - M^2) \frac{\partial_x u}{u} + \frac{\partial_x A}{A} = 0 \quad (*79)$$

という関係式が得られる。ここで

$$M = \frac{u}{c} \quad (*80)$$

であり、 u も c も x の関数なので M も一般に x に依存する。このような M を **局所 Mach 数** という。

練習問題 25

教科書やノートを見ずに、式 (*79) の導出過程を自力で再現せよ。

式 (*79) から、超音速の流れ ($M > 1$) は、我々が日常見慣れている亜音速の流れ ($M < 1$) とはある意味で全く異なる性質をもつことが分かる。そのことを考察する前に、まず、先のほうに行くにつれて断面積 A がしだいに小さくなるような管を用意し、この管に流体を流して加速することを考えよう。非圧縮流体では、速度 u は断面積 A に反比例するはずで、したがって A が小さくなるにつれて u は大きくなる。実際、式 (*79) で $M < 1$ (亜音速) の場合は、

$$\begin{aligned} \partial_x A < 0 \quad \text{ならば} \quad \partial_x u > 0 \\ \partial_x A > 0 \quad \text{ならば} \quad \partial_x u < 0 \end{aligned}$$

となり、非圧縮の場合の常識と定性的に一致する。ところが $M = 1$ に達するとこの常識は破れる。超音速 ($M > 1$) の流れでは、不等号の向きが逆転し、

$$\begin{aligned} \partial_x A < 0 \quad \text{ならば} \quad \partial_x u < 0 \\ \partial_x A > 0 \quad \text{ならば} \quad \partial_x u > 0 \end{aligned}$$

となるので、狭まっていく管では、音速 ($M = 1$) が加速の限界となる。この方法では、 $M > 1$ まで加速することはできない。

音速を超えて加速するには、管の断面積を途中まで減少させ、途中から増加に転じるようにする。流体を超音速に加速するためのこのような管を **Laval 管** と言い、断面積が最小になる箇所を **スロート** (throat) という。入口と出口のあいだにじゅうぶんな圧力差をかけることにより、スロートで音速にもっていくことができれば、そこから先では、管の広がりによって流体は超音速に加速される。一見すると奇妙に思えるが、管を広げることで $\partial_x p < 0$ の状態 (“下り坂” の圧力勾配) を作り、式 (*77) にしたがって流体を加速している、と考えれば納得しやすいだろう。

練習問題 26

断面積の変化する管を用いて流れを超音速に加速するしくみについて説明せよ。

練習問題 27

幅が $B = B(x)$ のように変化する水路を用意し、水の流れを、上流での $u < \sqrt{gh}$ の状態から下流での $u > \sqrt{gh}$ の状態へと定常的に加速したい ($\sqrt{gh}$ は浅水波の速度)。この水路における質量保存の式

$$\partial_t (Bh) + \partial_x (Bh\bar{u}) = 0 \quad (*81)$$

と式 (32.4') を連立させ、定常解における $\partial_x \bar{u}$ と $\partial_x B$ の関係を求めることにより、このような加速のために必要となる水路の形について検討せよ。

おまけ

Laval 管の出入口の圧力差が中途半端だと、流体はいったん超音速まで加速されるが、途中で衝撃波などが生じて亜音速に戻ってしまう。水道の蛇口の下で観察される跳水は、じつはこれに類似した機構によって発生している。