

流体力学 II グループワーク

学籍番号 _____ 名前 _____
 学籍番号 _____ 名前 _____

大信田 (応用数理工学科) 2014-05-16

運動量の移流項の計算

- 流体中の速度場を $\mathbf{v} = (u, v, w) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ とする
- 密度 ρ は定数かもしれないし定数でないかもしれない
- 各辺が x 軸・ y 軸・ z 軸に平行であるような微小な直方体を考える (体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$)
 → 流れによって時間 Δt のあいだにこの直方体に運び込まれる運動量は?

㊦の面について 面の方向 = $(-1, 0, 0)$

$$\Delta m_{\text{㊦}} = [\text{㊦の面から流入する質量}] = +\rho u|_x \Delta t \Delta y \Delta z$$

$$\text{㊦の面から流入する流体の持つ運動量} = \Delta m_{\text{㊦}} \begin{bmatrix} u_{\text{㊦}} \\ v_{\text{㊦}} \\ w_{\text{㊦}} \end{bmatrix} = (\rho u \mathbf{v})|_x \Delta t \Delta y \Delta z \quad \dots \text{㊦}$$

㊧の面について 面の方向 = $(1, 0, 0)$

$$\Delta m_{\text{㊧}} = [\text{㊧の面から流入する質量}] = -\rho u|_{x+\Delta x} \Delta t \Delta y \Delta z$$

$$\text{㊧の面から流入する流体の持つ運動量} = \Delta m_{\text{㊧}} \begin{bmatrix} u_{\text{㊧}} \\ v_{\text{㊧}} \\ w_{\text{㊧}} \end{bmatrix} = -(\rho u \mathbf{v})|_{x+\Delta x} \Delta t \Delta y \Delta z \quad \dots \text{㊧}$$

$$\text{㊦} + \text{㊧} = \frac{-\rho(u\mathbf{v})|_{x+\Delta x} + \rho(u\mathbf{v})|_x}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \rightarrow -\frac{\partial(\rho u \mathbf{v})}{\partial x} \Delta V \Delta t \quad \text{ベクトルとスカラーの区別に注意!}$$

㊨の面について 面の方向 = $(0, -1, 0)$

$$\Delta m_{\text{㊨}} = [\text{㊨の面から流入する質量}] = +\rho v|_y \Delta t \Delta z \Delta x$$

$$\text{㊨の面から流入する流体の持つ運動量} = \Delta m_{\text{㊨}} \begin{bmatrix} u_{\text{㊨}} \\ v_{\text{㊨}} \\ w_{\text{㊨}} \end{bmatrix} = (\rho v \mathbf{v})|_y \Delta t \Delta z \Delta x \quad \dots \text{㊨}$$

㊩の面について 面の方向 = $(0, 1, 0)$

$$\Delta m_{\text{㊩}} = [\text{㊩の面から流入する質量}] = -\rho v|_{y+\Delta y} \Delta t \Delta z \Delta x$$

$$\text{㊩の面から流入する流体の持つ運動量} = \Delta m_{\text{㊩}} \begin{bmatrix} u_{\text{㊩}} \\ v_{\text{㊩}} \\ w_{\text{㊩}} \end{bmatrix} = -(\rho v \mathbf{v})|_{y+\Delta y} \Delta t \Delta z \Delta x \quad \dots \text{㊩}$$

$$\text{㊨} + \text{㊩} = \rightarrow -\frac{\partial(\rho v \mathbf{v})}{\partial y} \Delta V \Delta t$$

㊦の面について

... ㊦

㊧の面について

... ㊧

すべての面の寄与を合計

$$\begin{aligned}
 [\text{流れとともに運び込まれる運動量}] &= \text{㊦} + \text{㊧} + \text{㊨} + \text{㊩} + \text{㊪} + \text{㊫} \\
 &= \\
 &= - \sum_j \partial_j (\rho v_j \mathbf{v}) \Delta V \Delta t \quad (\heartsuit)
 \end{aligned}$$

連続の式を利用して運動量の移流項を書き直す

流体が非圧縮で密度が一定なら $\Delta m_{\text{㊦}} + \Delta m_{\text{㊧}} + \Delta m_{\text{㊨}} + \Delta m_{\text{㊩}} + \Delta m_{\text{㊪}} + \Delta m_{\text{㊫}} = 0$ であるはず
 → この式を (u, v, w) で書き直すと

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

式(♡)で積の微分を計算 (密度 ρ は定数だとする)

$$\partial_x(\rho u \mathbf{v}) = \rho (\partial_x u) \mathbf{v} + \rho u \partial_x \mathbf{v}$$

$$\partial_y(\rho v \mathbf{v}) =$$

$$\partial_z(\rho w \mathbf{v}) =$$

これを式(♡)に代入し、連続の式に着目して整理

$$\begin{aligned}
 [\text{流れとともに運び込まれる運動量}] &= \\
 &= - (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \Delta V \Delta t
 \end{aligned}$$