

注意: 以下の例は略解に過ぎないので、このまま丸暗記してはいけません!
教科書を見たり友人同士で相談し合ったりして、より良い解答例を考えてみることを。

1 Euler 方程式

- (a) 以下の式で、抜けている箇所を補い、非圧縮の完全流体の運動方程式 (Euler 方程式) を完成させよ。ただし、外力は重力だけであるものとし、鉛直上向きを z 方向とする。

教科書 p.14 を見よ。ただし教科書にある式では両辺を ρ で割ってある。

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\end{aligned}$$

- (b) Euler 方程式は、体積 V のなかの流体の運動量に関する次のような式を書き直したものである:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V \rho u \, dV &= - \int_S \rho u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_S p n_x \, dS \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho v \, dV &= - \int_S \rho v \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_S p n_y \, dS \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho w \, dV &= - \int_S \rho w \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_S p n_z \, dS + \int_V (-\rho g) \, dV\end{aligned}$$

空欄を埋めよ。

- (c) 上記 (b) の 3 番目の式 (z 方向の運動量の式) について、右辺の各項の意味を説明せよ。

- 右辺第 1 項: $-\int_S \rho w \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$ = [面 S を通じて流体とともに流入する運動量の z 成分]
- 右辺第 2 項: $-\int_S p n_z \, dS$ = [面 S に及ぼされる圧力による力の z 成分]
- 右辺第 3 項: $\int_V (-\rho g) \, dV$ = [体積 V のなかの流体にはたらく重力]

2 Navier-Stokes 方程式

非圧縮の粘性流体の支配方程式 (連続の式および Navier-Stokes の運動方程式) を記せ。単に式を書くだけでなく、それぞれの文字が何を意味するのも説明すること。

教科書 p.155 を見よ。また、問題 1 の Euler 方程式との共通点や相異点を押さえておくこと。

- 連続の式: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ [非圧縮でない場合 → 教科書の式 (3.1) または (3.2)]

- Navier-Stokes 方程式 (x 成分):
$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u$$

- Navier-Stokes 方程式 (y 成分): [省略]

- Navier-Stokes 方程式 (z 成分): [省略]

- 記号の説明 [省略]

3 境界条件

- (a) 粘性をもつ普通の流体が物体壁面上で満たすべき条件について説明せよ。

物体壁面上では、物体に対する流体の相対速度はゼロになる (これを粘着条件という)。特に、物体が静止している場合には、壁面上での流体の速度がゼロになる。

- (b) 翼のような物体のまわりの流れは、ポテンシャル流れとして完全流体の理論で扱うことができる。この場合、空気が物体に接する部分での流れについてはどう考えるべきか? 上記 (a) との関係に注意して説明せよ。

教科書の pp.158 ~ 160 を見よ。ここで重要なのは境界層という概念である (→ 境界層とは何であるか、しっかり理解しておくこと!)。そもそもポテンシャル流れと粘着条件は矛盾するのであって、境界層の存在によって はじめてこの矛盾が回避されることに注意。