

注意: 以下の例は略解に過ぎないので、このまま丸暗記してはいけない!  
教科書を見たり友人同士で相談し合ったりして、より良い解答例を考えてみることを。

### 1 Navier-Stokes 方程式

外力として重力のみを受ける非圧縮流体の運動を考えると、Navier-Stokes 方程式および連続の式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{#1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \tag{#2}$$

のように書ける。座標系として2次元のデカルト座標系をとり、 $\mathbf{g} = (g \sin \theta, -g \cos \theta)$  として、式 (#1)(#2) を成分表示で書き下せ。なお  $D/Dt$  や  $\nabla$  についても、 $\partial_x = \partial/\partial x$  などを用いて、なるべく具体的に書くこと。

式 (#1) の  $x$  成分: 
$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

式 (#1) の  $y$  成分: 
$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

連続の式 (#2): 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

### 2 平行流

(a) 上記の問題 1 において、さらに速度が  $x$  軸につねに平行であるという制約条件を課す。この制約条件のもとで、方程式系はどれだけ簡単化されるか? 問題 1 の結果から出発し、段階を追って説明せよ。

- まず  $v = 0$  なので、式 (#1) および (#2) で  $v$  を含む項はすべてゼロになる。

式 (#1) の  $x$  成分: 
$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{あ}$$

式 (#1) の  $y$  成分: 
$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{い}$$

連続の式 (#2): 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{う}$$

- 式 (う) により、式 (あ) からさらに2つの項が消える。

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{あ'}$$

- 式 (あ') を変形して  $u$  を左辺に集める:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \sin \theta - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \left( \nu = \frac{\mu}{\rho} \right) \tag{◇}$$

式 (う) により左辺は  $x$  によらず、式 (い) により右辺は  $y$  によらない ( $y$  で偏微分するとゼロ\*)。

$$\implies \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \sin \theta - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha(t).$$

もしも定常なら  $\alpha$  は定数となり、 $u$  も  $p$  も 1 変数関数となって、微分は偏微分でなく常微分になる。

\*式 (い) より  $\rho^{-1} \partial_y p = -g \cos \theta$  だから、 $\partial_y$ [式 (◇) の右辺] =  $\partial_y (g \sin \theta - \rho^{-1} \partial_x p) = \rho^{-1} \partial_x \partial_y p = \partial_x (-g \cos \theta) = 0$ .

(b) 流体は  $0 < y < H$  の領域を占め、また問題 (a) で述べた制約条件が成り立つものとする。以下のそれぞれの場合について、 $x$  方向の圧力勾配  $\partial_x p$  の値を示し、また 速度場に対する境界条件 を書き下せ。

(あ) 重力は  $-y$  方向である (つまり  $\theta = 0$ )。  $y = 0$  に静止した壁があり、  $y = H$  には別の壁があって  $x$  方向に速度  $U$  で動いている。点  $(x_{\min}, H)$  と  $(x_{\max}, H)$  での圧力は、どちらも大気圧  $p_{\text{atm}}$  に等しい。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=H} = U.$$

(い)  $y = 0$  および  $y = H$  に壁があり、この壁は垂直である (つまり  $\theta = \pi/2$ )。壁はどちらも静止している。 $x = 0$  における圧力は  $p_1$  で、 $x = L$  における圧力は  $p_2$  である。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L}; \quad u|_{y=0} = u|_{y=H} = 0.$$

(う) 傾斜角  $\theta$  はゼロと直角のあいだのある値をとる。  $y = 0$  には静止した壁があり、  $y = H$  は自由表面であって、そこでの圧力は大気圧  $p_{\text{atm}}$  に等しい。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = 0.$$

(c) 上記 (あ)(い)(う) のなかから 1 つを選び、定常流の場合の速度分布を計算して、その概形を図示せよ。

[速度場  $u = u(y)$  についての ODE を解き、境界条件を満たす解を求めて図示する。]

### 3 円柱座標における Laplacian の計算

円柱座標を  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  によって導入すると、ナブラ演算子は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \quad \left( \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

のように書ける。速度場を  $\mathbf{u} = v \mathbf{e}_\theta$ ,  $v = v(r)$  として、 $\text{rot } \mathbf{u}$  および  $\nabla^2 \mathbf{u}$  を計算せよ。

[ベクトル解析の補足プリントを見よ!]