

注意: 以下の例は略解に過ぎないので、このまま丸暗記してはいけません!
教科書を見たり友人同士で相談し合ったりして、より良い解答例を考えてみることを。

1 Navier-Stokes 方程式

外力として重力のみを受ける非圧縮流体の運動を考えると、Navier-Stokes 方程式および連続の式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\#1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\#2)$$

のように書ける。座標系として 2 次元のデカルト座標系をとり、 $\mathbf{g} = (g \sin \theta, -g \cos \theta)$ として、式 (#1)(#2) を成分表示で書き下せ。なお D/Dt や ∇ についても、 $\partial_x = \partial/\partial x$ などを用いて、なるべく具体的に書くこと。

$$\text{式 (\#1) の } x \text{ 成分: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{式 (\#1) の } y \text{ 成分: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{連続の式 (\#2): } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2 平行流

(a) 上記の問題 1 で、速度が x 軸につねに平行であるという制約条件を課す。この制約条件のもとで (非定常流も含む) 方程式系はどれだけ簡単化されるか? 問題 1 の結果から出発し、段階を追って説明せよ。

- まず $v = 0$ なので、式 (#1) および (#2) で v を含む項はすべてゼロになる。

$$\text{式 (\#1) の } x \text{ 成分: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{あ})$$

$$\text{式 (\#1) の } y \text{ 成分: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{い})$$

$$\text{連続の式 (\#2): } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{う})$$

- 式 (う) により、式 (あ) からさらに 2 つの項が消える。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{あ}')$$

- 式 (あ') を変形して u を左辺に集める:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \sin \theta - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (\text{◇})$$

式 (う) により左辺は x によらず、式 (い) により右辺は y によらない (y で偏微分するとゼロ*)。

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \sin \theta - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha(t). \quad (\text{ふたつの微分方程式に分離できる})$$

もしも定常なら α は定数となり、 u も p も 1 変数関数となって、微分は偏微分でなく常微分になる。

*式 (い) より $\rho^{-1} \partial_y p = -g \cos \theta$ だから、 $\partial_y [\text{式 (◇) の右辺}] = \partial_y (g \sin \theta - \rho^{-1} \partial_x p) = \rho^{-1} \partial_x \partial_y p = \partial_x (-g \cos \theta) = 0$ 。

- (b) 流体は $0 < y < H$ の領域を占め、また問題 (a) で述べた制約条件が成り立つものとする。以下のそれぞれの場合について、 x 方向の圧力勾配 $\partial_x p$ の値を示し、また速度場に対する境界条件を書き下せ。

- (あ) 重力は無視できる ($g = 0$)。 $y = 0$ に静止した壁があり、 $y = H$ には別の壁があって x 方向に速度 U で動いている。点 $(x_{\min}, H)$ と $(x_{\max}, H)$ での圧力は、どちらも大気圧 p_{atm} に等しい。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=H} = U.$$

- (い) 流れは重力で駆動され ($g > 0$)、傾斜角 θ はゼロと直角のあいだのある値をとる。 $y = 0$ には静止した壁があり、 $y = H$ は自由表面であって、そこでの圧力は大気圧 p_{atm} に等しい。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad u|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = 0.$$

- (c) 上記 (あ)(い) のうちどちらか片方を選び、定常流の場合の速度分布を計算して、その概形を図示せよ。

[速度場 $u = u(y)$ についての ODE を解き、境界条件を満たす解を求めて図示する。]

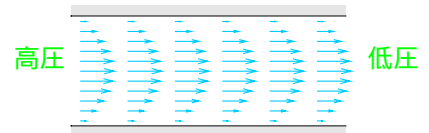
3 Poiseuille 流れ

問題 1 にあるような 2 次元の流体系で、 $y = \pm a$ に静止した壁があり、そのあいだを流体が流れる場合を考える。

- (a) 上流側と下流側の間に適当に圧力差をかけて流体を押し流すと、定常状態では右下の図のような流れが生じる。このことを Navier-Stokes 方程式に基づいて示せ。必要なら問題 1 や問題 2 の結果を利用してもよい。

- 定常かつ重力なしとして、式 (◇) と同様に考えると

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{dp}{dx}$$



左辺は x によらず右辺は y によらず、他に独立変数はないので、両辺とも定数でないといけない。

- 図から考えて左のほうが高圧であるはず。そこで α を正の定数として $dp/dx = -\alpha$ と置く。
- 境界条件 $u|_{y=\pm a} = 0$ のもとで $\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\alpha$ の解を求めると $u = \frac{\alpha}{2\mu} (a^2 - y^2)$. → 図のとおり

- (b) ある時刻に圧力差を突然ゼロにしたとすると、やがて流れは静止する。静止までの所要時間を概算せよ。

- 問題文の設定より、式 (◇) の右辺がゼロになる。 $\implies (\partial_t + \nu \partial_y^2) u = 0$.

- $u = T(t)Y(y)$ として代入し変数分離: $\frac{\dot{T}}{\nu T} = \frac{Y''}{Y} = \text{const.} = -k^2$.
これを解き、境界条件を考慮して

$$T = \text{const.} \times e^{-\nu k^2 t}, \quad Y = \text{const.} \times \sin k(y + a); \quad k = \frac{n\pi}{2a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

n 番目のモードの減衰率は $\sigma_n = -\nu \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2$.

- 流体が静止するまでに必要な時定数は、係数を別にすれば $\max_n \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_1} \sim \frac{a^2}{\nu}$.

一般に、経過時間 t のあいだに壁の影響が粘性を通じて及ぶ距離は $\sqrt{\nu t}$.

上記の結果は、 $\sqrt{\nu t}$ が流路の中央 (壁から距離 a だけ離れた位置) まで達するための所要時間と考えて求めることもできる。