

圧縮性流体力学のための熱力学メモ

2009-01-13 大信田

理想気体に限らず普遍的に成り立つ関係式

熱力学ポテンシャル

内部エネルギー $E = E(S, V)$ $dE = TdS - pdV$ [熱力学第1法則: $dE = \text{熱} + \text{仕事}$] (1)

エンタルピー $H = H(S, p)$ $dH = TdS + Vdp = d(E + pV)$ (2)

Helmholtz の自由エネルギー $F = F(T, V)$ $dF = -SdT - pdV = d(E - TS)$ (3)

Gibbs の自由エネルギー $G = G(T, p)$ $dG = -SdT + Vdp = d(F + pV) = d(H - TS)$ (4)

示量変数 (系の大きさに比例する熱力学変数): S, V, E, F, G, H

流体力学では質量あたりに換算して考えることが多い $\rightarrow s = S/m, e = E/m, h = H/m$ etc.

ただし V については $\rho = m/V$ とする (つまり $1/\rho = V/m$).

式 (1) を流体力学用に書き直す: $\frac{De}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} - p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$. (1')

示強変数 (系の大きさによらない熱力学変数): p, T

熱力学第1法則: エネルギーは増やすことも減らすこともできない (移動させることはできる)

式 (1): E の増分 = 熱として得たエネルギー + 仕事として得たエネルギー

balance law: $\partial_t [\rho(e + \frac{1}{2}u^2)] + \text{div}(\text{なんとか}) = 0$.

熱力学第2法則: エントロピーは減らせない (増やすことと移動させることはできる)

balance law: $\partial_t(\rho s) + \text{div}(\text{なんとか}) = \sum (\text{なんとか})^2 \geq 0$.

理想気体限定で成り立つ関係式

状態方程式 (両方とも1つの熱力学ポテンシャルから導けるがここでは省略):

$$p = \rho RT \quad \left(R = \text{質量あたりの気体定数} = \frac{k_B}{m_0} \right) \quad (5)$$

$$e = c_v T \quad \left(c_v = \text{定積比熱: 気体の種類によって } c_v = \frac{3}{2}R \text{ だったり } c_v = \frac{5}{2}R \text{ だったりする} \right) \quad (6)$$

式 (5)(6) から以下の式が導かれる:

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_p T \quad \left(c_p = \text{定圧比熱} = c_v + R; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \text{ を用いると } c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \right) \quad (7)$$

$$s = s_0 + c_v \log \frac{p}{p_0} - c_p \log \frac{\rho}{\rho_0}; \quad p = p_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (8)$$

音速 (圧力変動の伝わる速度):

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} = c_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{2c_v} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (9)$$

$$\text{式 (7)(9) より } h = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}. \quad (10)$$