

---

## 振り子による重力加速度の測定

---

### 課題

単振り子を用いて、重力加速度を測定する。

### 用意するもの

50 円硬貨 (または 5 円硬貨)、糸、はさみ、スタンド、巻尺 (または物差し)、時計 (秒単位で計れるもの) ストップウォッチがあるとよい。

### 実験

- 単振り子を作る。
  - スタンドを机に固定する。
  - 糸を約 40cm の長さに切り取り、一端を 50 円硬貨の穴に、他の一端をスタンドの腕に結びつける。
  - 巻尺 (最小目盛り 0.1[cm]) を用いて、スタンドに固定された振り子の支点から 50 円硬貨の上端までの長さ  $l_1$  と、同じく下端までの長さ  $l_2$  を測定し、 $l = (l_1 + l_2)/2$  を求める (図 1 を参照せよ)。
- 小さな振幅  $\theta_0$  を与えて振り子を運動させ、最上点に達する回数を  $n$  回目まで数えて、その経過時間を記録する。周期の測定には、時計 (最小目盛り 1[s]) を用いる。
- 表 1 を完成させ、周期  $T$  を求める。なお、 $\theta_0$  や  $n$  ( $\sim 100$ ) は、長さに応じて最も適当に設定せよ。
- 式 (2) を用いて、重力加速度  $g$  を求める。
- さらに、硬貨の種類や糸の長さなどの条件を変えて、同様の測定をおこなう。
- 実験が終わったら、スタンドや測定器具をきちんと片付ける。 ... 来たときよりも美しく ...

表 1: 測定データ

[A] 長さ  $l$  の測定

測定回数	1	2	3			平均値
$l_1$ [cm]						
残差 $\delta_1^2$ [cm <sup>2</sup> ]						
$l_2$ [cm]						
残差 $\delta_2^2$ [cm <sup>2</sup> ]						

$$l = \text{_____} \pm \text{_____} \text{ [cm]}$$

[B] 周期  $T$  の測定

測定回数	1	2	3			平均値
$nT$ [s]						
残差 $(n\delta_3$ [s]) <sup>2</sup>						

$$T = \underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{1cm}} \text{ [s]}$$

## 解説

### 単振り子の振動周期

振り子が等時性を示すことはよく知られている。糸の長さを  $l$  とし、振り子のおもりを質量  $m$  の質点とみなすことにしよう。この質点は、鉛直下向きの重力と、糸からの束縛力を受け、Newton の運動方程式にしたがって運動する。

振れ角  $\theta$  が小さいとすれば、 $\theta$  は

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

という 2 階の線形常微分方程式に従う ( $\ddot{\theta}$  は  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  を意味する)。この方程式の解は単振動であり、

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi_0\right) \quad (1)$$

と書ける。ここで  $\theta_0$  と  $\phi_0$  は初期条件によって決まる定数であるが、周期  $T$  はこれらの定数によらず

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

という一定値をとる。式 (2) から明らかなように、周期  $T$  は重力加速度  $g$  に依存するから、これから逆に、 $T$  および  $l$  を測定して  $g$  を求めることができる。

### 物理振り子

実際には振り子のおもりは有限の大きさをもつから、質点よりも剛体として扱うほうが実物に近い (物理振り子)。長さ  $l$  を (糸の長さではなく) 回転の中心から剛体の重心までの距離をあらわすものとする。剛体にはたらく重力の周方向成分は  $-mg\sin\theta$  であり、したがって重力のモーメント  $N$  は

$$N = -mgl\sin\theta$$

と書ける。剛体の慣性モーメントを  $I$  とすれば、物理振り子の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \quad \left(I = ml^2 + I_G\right) \quad (3)$$

であり、ここで  $I_G$  は剛体の重心まわりの慣性モーメントで、たとえば、糸の質量を無視し、おもりを半径  $r$  の一様な材質の円盤と見なすと  $I_G = \frac{1}{4}mr^2$  である。

物理振り子の方程式 (3) は、その特別な場合として、最初に述べた質点振り子 (単振り子) の運動を含んでいる。すなわち、式 (3) の両辺を  $\ell$  で割り、 $I_G \ll m\ell^2$  (すなわち  $r \ll \ell$ ) とすることにより、質点振り子の運動方程式

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (4)$$

が得られる。さらに、振幅が微小であると仮定して  $\sin \theta \approx \theta$  と近似すれば、式 (4) は単振動の方程式に帰着し、式 (1) が再現される。

### 有限振幅の影響

解 (1) および周期 (2) は、振幅が微小であるという仮定のもとで得られたものであるが、有限振幅の場合に式 (2) がどのようなようになるかを考えてみよう。方程式 (3) または (4) を厳密に解くには楕円関数というものが必要であるが、ここでは、よりなじみの深い三角関数を用いた近似解を求めることにする。

具体的に周期  $T$  を求めるため、 $\sin \theta$  の Taylor 展開を利用し、方程式 (4) を

$$\ddot{\theta} = -\frac{\ell}{g} \sin \theta = -\frac{\ell}{g} \left( \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \right) \quad (5)$$

のように書き換える。ここで、式 (1) によく似た正弦振動解

$$\theta \simeq \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6)$$

を仮定し ( $\omega = 2\pi/T$ ), 式 (5) に代入する。結果は

$$-\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) = -\frac{\ell}{g} \left\{ \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{1}{6} \theta_0^3 \cos^3(\omega t + \phi_0) \right\}$$

となり、この両辺に  $\cos(\omega t + \phi_0)$  をかけて  $t = 0$  から  $t = T$  まで積分 ( $\int_0^T dt$ ) すると

$$-\frac{T}{2} \omega^2 \theta_0 = -\frac{\ell}{g} \left( \frac{T}{2} \theta_0 - \frac{3}{8} T \times \frac{1}{6} \theta_0^3 \right)$$

すなわち

$$\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \omega^2 = \frac{\ell}{g} \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (7)$$

が得られる。特に、微小振幅の極限を考え、式 (7) において  $\theta_0 \rightarrow 0$  とすると

$$\omega = \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\ell}{g} \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

すなわち式 (2) に帰着するから、式 (7) は確かに式 (2) の一般化になっていることが分かる。

## 検討課題

1. 硬貨の種類によらず、重力加速度  $g$  は同一の値が得られるか。
2. 振り子の糸の長さを変えると、周期  $T$  はどうなるか。
3. この実験で測定した  $g$  の値を、より精密な測定値 (理科年表を見よ) と比較する。もし有意な差があるとすれば、その原因は何か？
4. ここまでの議論では、ふりこの長さ  $\ell$  は 糸の一端からコインの中心までの距離であると考えてきたが、 $\ell$  をこのように解釈して良いかどうかを考察する (たとえばコインの下端までの長さとするべきではないか)。
5. この実験において、硬貨で作った振り子を質点振り子と見なすべきか、それとも物理振り子と見なすべきか、各自工夫して調べてみよ。
6. 式 (2) は振幅が無限に小さいときに成り立つ式であるが、実際の振り子の振幅は有限である。このことによる  $g$  の誤差を見積もれ。この誤差は、他の誤差と比べて大きいだろうか？
7. 振り子の等時性は、日常生活において、振り子時計として実用化されている。時計の仕組みはどのようなになっているのだろうか。
8. 振り子以外の手段を用いて重力加速度を測定する方法を考えよ (いくつ挙げてもよい)。

このテキストは、わざと余計な話を書いてあったり、逆に必要な説明が足りなかったりという、非常に不親切な書き方になっています。したがって、表面的な記述にだまされてはいけません。何が本質的なのか、中心となる問題は何なのか、正しく見抜くことが大切です。

物理学実験 (木曜コース) 練習用実験テキスト

ホームページ: <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/jikken/>