

定数係数の線形同次 ODE: よくない解答例

例題: $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ の一般解を求めよ。

 (1)

良くない解答例 1

方程式 (1) を書き直すと

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\right) \left(\frac{d}{dt} + 3\right) = 0. \quad (2)$$

したがって一般解は

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (A, B \text{ は任意定数}). \quad (3)$$

どこがまずいか?

求めるべきもの (未知の関数) は x であるのに、式 (2) から x が消えてしまっている。ここでは x を含めて

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\right) \left(\frac{d}{dt} + 3\right) x = 0 \quad (2')$$

と書くべき。

さらにていねいに書くとすれば、

したがって、方程式 (1) の一般解は、 $\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ の解と $\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ の解の線形結合。計算すると...

とかいうことも言っておくほうが良いだろう (分かっている人は省略しても可)。

良くない解答例その 2

$\frac{d}{dt} = \alpha$ と置くと $\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0$ 。これを解くと $\alpha = -2, -3$ だから、一般解は

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

どこがまずいか?

これもさっきと同じ理由で、せめて $\frac{dx}{dt} = \alpha x$ と書いてほしい。もったきちんと書くとすれば「基本解を $x = e^{\alpha t}$ と置くと...」とするのが良いだろう。

標準的な書き方

基本解を $x = e^{\alpha t}$ と置くと (α は定数) $\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$.

方程式 (1) に代入すると

$$(\alpha^2 + 5\alpha + 6) e^{\alpha t} = 0. \quad (4)$$

t の恒等式とみて $\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0$ すなわち $\alpha = -2, -3$.

これにより、2 つの基本解 e^{-2t}, e^{-3t} が得られた*。一般解は基本解の線形結合で

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

*一般に n 階の線形同次 ODE の一般解は n 個の基本解の線形結合である。今の場合は $n = 2$.