

## 簡単な ODE の解析解を差分で求める

例 1  $\frac{dx}{dt} = kx$  ( $k$  は定数); 初期条件  $x|_{t=t_0} = x_0$ .

$t_n = t_0 + n\Delta t$ ,  $x_n = x(t_n)$  として差分化すると

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = kx_n$$

分母を払って整理し

$$x_{n+1} = (1 + k\Delta t)x_n \quad (1)$$

式 (1) は等比数列の漸化式. 初期条件  $x_0$  が分かっているので, 一般項は

$$x_n = x_0(1 + k\Delta t)^n = x_0 \left(1 + \frac{k(t_n - t_0)}{n}\right)^n \quad (2)$$

ここで  $\Delta t \rightarrow 0$  すなわち  $n \rightarrow +\infty$  の極限をとり,  $t_n \rightarrow t$  として

$$x_n \rightarrow x(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 \left(1 + \frac{k(t - t_0)}{n}\right)^n = x_0 e^{k(t-t_0)} \quad (3)$$

検算: 解 (3) をもとの方程式の両辺にそれぞれ代入.

$$[\text{左辺}] = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (x_0 e^{k(t-t_0)}) = kx_0 e^{k(t-t_0)}$$

$$[\text{右辺}] = kx = kx_0 e^{k(t-t_0)}$$

したがって左辺と右辺が等しいので等号が成立し, 確かに解である.

例 2  $\frac{dv}{dt} = a$  ( $a$  は定数); 初期条件  $v|_{t=t_0} = v_0$ .

例 1 と同じように差分化し, 分母を払って整理:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = a \quad \text{すなわち} \quad v_{n+1} = v_n + a\Delta t. \quad (4)$$

式 (4) は等差数列の漸化式であり, 一般項は

$$v_n = v_0 + na\Delta t \quad (5)$$

これに  $\Delta t = (t_n - t_0)/n$  を代入し,  $n \rightarrow +\infty$  の極限を考えて  $t_n \rightarrow t$  とすると

$$v_n \rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0). \quad (6)$$

検算:

$$[\text{左辺}] = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (v_0 + a(t - t_0)) = a = [\text{右辺}]$$