

常微分方程式 例題集 (1)

大信田 丈志 (応用数理工学科) 2009-05-27

常微分方程式に関する用語や概念

講義ノートを見て各自で確認しておくこと。

講義で扱った例題 (配布資料や宿題も含む)

数列

- 等比数列や等差数列で初項を 0 番目とした場合、一般項はどうあらわされるか? 初項を 1 番目とした場合とはどう異なるか?
- 某ホテルでは 1 泊目の宿泊料金が 5 ユーロで、 $n+1$ 泊目の料金は n 泊目の料金の 3 倍である。7 泊目までの合計金額を求めよ。また、一般に n 泊目までの合計金額を計算する方法を説明せよ。
- 数列 $4, 5, 10, 23, 52, 113, \dots$ の階差数列を求め、これから a_{10} を求めよ (初項を a_1 とする)。
- 隣接 3 項間漸化式

$$Q_{n+1} = Q_n + 2Q_{n-1}$$

の一般項を求めよ。ただし、初期条件は、任意定数 2 個を含む限りどのように置いてもよい (なるべく一般項がきれいな形になるようにする)。

微分方程式と差分方程式

- 常微分方程式 $\frac{dx}{dt} = kx$ を差分方程式に直すときの考え方について説明せよ。
- $F(q) = 2 \sin q - 1$ とする。常微分方程式

$$\frac{dq}{dt} = F(q), \quad q|_{t=0} = 1.0$$

をみたく $q = q(t)$ のグラフを作れ。

- 次のような ODE の初期値問題を考える:

$$\frac{dx}{dt} = 0.710x^2 + 1.760, \quad x|_{t=0} = 1.000.$$

この初期値問題の解において、 x が $x = 2$ に達するのはいつか?

- k を定数として、 $\frac{dx}{dt} = kx$ の一般解を差分により求めよ。

- a を定数として、 $\frac{dv}{dt} = a$ の一般解を差分により求めよ。

- 微分の意味についてグラフを用いて説明し、数列の階差と関係づけられることを示せ。さらに、2 階微分についても同様に階差と関係づけられることを説明せよ。

- α を定数として

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2y \quad (*1)$$

の一般解を差分で求める際の考え方を説明せよ。

- 質量 m のおもりが、バネから力を受けて 1 次元的に運動している。Hooke の法則と Newton の運動法則を組み合わせ、おもりの運動方程式を差分の形で求めると次のようになることを示せ:

$$m \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = m \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} - kx_n \Delta t. \quad (*2)$$

- おもりの運動方程式 (*2) は差分方程式の形になっている。ここで $\Delta t \rightarrow +0$ の極限をとり、この運動方程式を微分方程式の形に書き直せ。

積分による常微分方程式の解法

- 積分と \sum の関係について説明せよ。さらに、これを用いて、積分と微分が互いに逆の演算となる理由を説明せよ。

- 常微分方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g (= \text{const.})$$

の一般解の求め方を示し、任意定数が 2 つ現れる理由を説明せよ。

- 常微分方程式 (*1) を解く場合、単純に両辺を x で積分してもうまくいかない理由を説明せよ。

- α を定数として、常微分方程式

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)p = 0 \quad (*3)$$

の一般解を変数分離の方法で求めよ。

- 次の ODE の一般解を求めよ:

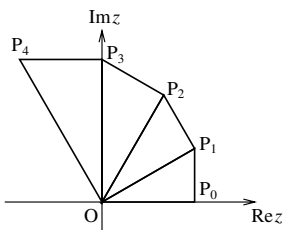
$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{1}{2t}\right)y = 0.$$

複素数平面

- 複素数の掛け算の図形的な意味を説明せよ。
- 次の図のように、鋭角 α をもつ相似な直角三角形を複素数平面上に並べていく。点 P_n に対応する複素数を $z_n = x_n + iy_n$ とすると

$$z_n = (1 + i \tan \alpha)^n z_0$$

となることを説明せよ。



- すべての複素数 z に対して (虚数を含めて)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

が成り立つ。特に $z = i\theta$ の場合について左辺を図形的考察から求め、Euler の公式を導出せよ。

線形同次 ODE

- 線形同次の方程式とはどのような方程式か説明し、その解の特徴を述べよ。
- 常微分方程式 (*1) の一般解を、微分演算子を因数分解する方法で求めよ。
- 次の常微分方程式の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0.$$

- 常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$$

の一般解を、基本解を $y = e^{\alpha x}$ と置いて代入する方法で求めよ*。

- 次の ODE の一般解を実数の形で求めよ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

補充問題

微分と差分

- $\frac{d^2x}{dt^2}$ と $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ はどう違うか差分で示せ。
- $x\frac{d}{dt}y$ と $\frac{d}{dt}(xy)$ はどう違うか差分で示せ。
- 次の初期値問題の解を、 $x = 2$ に達するまで数値的に計算し、得られた数値解を図示せよ:

$$\frac{dx}{dt} = 0.950x^2 + 0.530, \quad x|_{t=0} = 1.000.$$

- 差分方程式

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} = 3t_n^2 \quad (t_n = t_0 + n\Delta t)$$

の解と、対応する ODE の解との関係を説明せよ。

変数分離

- 次の ODE の初期値問題の解を求めて図示せよ:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2, \quad x|_{t=0} = 0.$$

- 次の ODE の一般解を求めよ (ここで α は定数):

$$\left(r\frac{d}{dr} - \alpha\right)u = 0. \quad (*4)$$

線形同次 ODE

- 次の ODE を解くには基本解をどう置くべきか?

$$r^2\frac{d^2p}{dr^2} - 6p = 0.$$

ヒント: 方程式 (*4) の解を参考にする。

*定数係数の線形同次 ODE で基本解を $\exp(\text{なんとか})$ と置くのは、1 階の場合の式 (*3) がヒントになっている。