

常微分方程式 例題集 (1) 解説

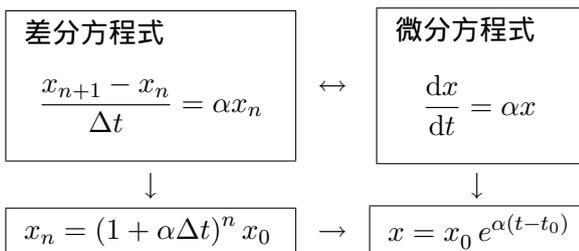
大信田 丈志 (応用数理工学科) 2009-06-03

はじめに注意

ここで解説していない問題が重要でないというわけではない。重要な例題であっても、スペースの都合上、講義ノートを見れば分かるものや少し想像力を働かせればすむようなものは省略している。

差分方程式と微分方程式

下記の図式の途中が空欄になっていても自力で埋められるようにする。また、とかの箇所の途中の過程も説明できるようにしておこう。



そのほか、微分方程式を差分方程式に書き換えたり、差分方程式を微分方程式に書き換えたりする練習もしておくといよい。たとえば、バネから力を受けるおもりの運動方程式は、もともとのNewtonの考え方では

$$m \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = m \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} - kx_n \Delta t \quad (1)$$

という差分方程式になる。式(1)は、変形すると

$$m \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} = -kx_n$$

と書き直せる(差分方程式であることに変わりはない)。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ とすることにより、現代の学生にとっておなじみの、ODEの形の運動方程式が得られる。

積分によるODEの解法

常微分方程式

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g (= \text{const.}) \quad (2)$$

の一般解の求め方を示し、任意定数が2つ現れる理由を説明せよ。

微分方程式(2)の右辺は x によらない定数であることに注意し、両辺を t で積分して

$$\frac{dx}{dt} = \int g dt = gt + C$$

ここで C は積分定数。

もういちど両辺を t で積分して

$$x = \int (gt + C) dt = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$$

ここで D は第2の積分定数。

微分方程式(2)は2階だから、積分で解を求めるには積分を2回おこなう必要がある。積分をおこなうたびに任意定数が現れるので、最終的に2個の任意定数が出てくる。

α を定数として、常微分方程式

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha \right) p = 0 \quad (3)$$

の一般解を変数分離の方法で求めよ。

式(3)を変形して

$$\frac{dp}{p} = \alpha dt \quad (4)$$

両辺を積分して

$$\log p = \alpha t + C \quad (5)$$

p について解き、定数を $e^C = A$ に置き直して

$$p = Ae^{\alpha t} \quad (6)$$

注意

- 式(3)の積分の説明は“ t で積分して”のように変数名を宣言する必要があるが、式(4)の場合は“ p で積分して”という言い方はしない。両辺がすでに d のついた形(1次微分形式)になっているからだ。

- 式 (5) の左辺が $\log |p|$ となっていないことに疑問をもつ人がいるかもしれない。負の数の \log は高校数学では扱わないのだが、複素数の指数関数の知識を使うと、 $p < 0$ に対して

$$\log p = \log(-|p|) = \log |p| \pm \pi i$$

という式を示すことができる。式 (5) の積分定数を複素数の範囲で考えることにすれば、 $\pm \pi i$ は積分定数に含めることができるので、結局、左辺を $\log |p|$ でなく $\log p$ としても問題ないことが分かる。

線形同次 ODE

次の常微分方程式の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0. \quad (7)$$

常微分方程式 (7) は線形同次 ODE であるから、一般解は基本解の線形結合であらわされる。なお、これが線形同次であることは、式 (7) が

$$\hat{L}x = 0, \quad \hat{L} = \frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt} + 6$$

と書き直せることと、(c_1, c_2 を定数として) \hat{L} が

$$\hat{L}(c_1q_1 + c_2q_2) = c_1\hat{L}q_1 + c_2\hat{L}q_2$$

のように“バラせる”ことから分かる。

方程式 (7) は係数がすべて定数である (t を含まない) ので、基本解は \exp だと推測できる。そこで、基本解を $x = e^{\alpha t}$ と置き (α は定数)、方程式 (7) に代入する:

$$(\alpha^2 + 5\alpha + 6)e^{\alpha t} = 0. \quad (8)$$

t の恒等式とみて、 $\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0$ すなわち

$$\alpha = -2, -3$$

を得る。これにより、2つの基本解 e^{-2t}, e^{-3t} が得られたことになる。式 (7) は2階の線形同次 ODE なので、一般解は2つの基本解の線形結合であり

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (A, B \text{ は任意定数}). \quad (9)$$

次の ODE を解くにはどうしたらよいか?

$$r^2 \frac{d^2p}{dr^2} - 6p = 0. \quad (10)$$

線形同次 ODE ではあるが、定数係数ではないので、基本解を $e^{\alpha r}$ と置いてもうまくいかない。

方程式 (10) の基本解をどのように置いたらよいか考えるためのヒントとして、式 (10) とよく似た形の1階の ODE を解いてみる:

$$\left(r \frac{d}{dr} - \alpha\right) u = 0. \quad (11)$$

この ODE は (1 階なので) 変数分離法で解けて、結果は $u = Cr^\alpha$ となる (自分でやってみることに)。そこで式 (10) も同じ形の基本解を持つだろうと推測し、基本解を $p = r^\alpha$ と置いて代入してみる。 r の恒等式と見て $\alpha(\alpha - 1) - 6 = 0$ すなわち

$$\alpha = -2, 3$$

が得られ、これにより2つの基本解が得られる。一般解は2つの基本解の線形結合で書けて

$$p = Ar^{-2} + Br^3 \quad (A, B \text{ は任意定数}). \quad (12)$$

数値解

次の初期値問題の解を、 $x = 2$ に達するまで数値的に計算し、得られた解を図示せよ:

$$\frac{dx}{dt} = 0.950x^2 + 0.530, \quad x|_{t=0} = 1.000.$$

ODE の右辺を u とおき、差分化すると

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = u(x_n), \quad u = 0.950x^2 + 0.530.$$

分母を払って変形すると

$$x_{n+1} = x_n + u(x_n) \Delta t. \quad (13)$$

漸化式 (13) および初期条件を用いて、 $x_n = x(t_n)$ を順番に計算する。本当は Δt は無限小なのだが、ここでたとえば $\Delta t = 0.100$ として計算すると、次のような結果が得られる:

t	x	u	$u\Delta t$
0.00000	1.00000	1.48000	0.14800
0.10000	1.14800	1.78201	0.17820
0.20000	1.32620	2.20087	0.22009
0.30000	1.54629	2.80146	0.28015
0.40000	1.82643	3.69907	0.36991
0.50000	2.19634	5.11271	0.51127

あとは横軸に t 、縦軸に x をとって結果をグラフにする (横軸は t であって n ではないことに注意)。さらに、 Δt を半分にして再計算をおこない、得られる曲線がほぼ同じになることを確認する。