

常微分方程式 例題集 (2)

大信田 丈志 (応用数理工学科) 2009-07-28

常微分方程式の考え方

講義ノートを見て各自で確認しておく。

- ODE をたてるときの考え方
- ODE を解くための考え方

どちらも重要。講義ノートの筋書きをいちど自力で再現してみるとよい。

ODE は線形同次・線形非同次・非線形のどれにあてはまるかによって基本的な解法が異なる。また、式で解くだけでなく、微分が正か負かを見て増減を判断したり、相平面などの図の助けを借りて解の挙動を読みとることも習得してほしい。

応用数学としての一般的な注意

多くの場合、方程式に現れるそれぞれの変数は、何か現実の世界での量をあらわしている。場合に応じて

- 正の実数の範囲で解を求めるのか
- 実数全体の範囲で解を求めるのか
- 複素数の範囲で解を求めるのか

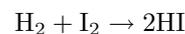
を考え、結果を適切に扱うべきである。特に、結果を複素数にする理由もないのに計算の都合によって複素数の解が出てきた場合は、任意定数を置き直し、最終的な結果を実数であらわすこと。

講義中に扱った例題

ODE のたてかた

- ラジオのチューナの基本構造は、コンデンサとコイルを直列にした回路と考えることができる。コンデンサにたまる電荷に着目し、微小時間 Δt のあいだの電荷の増減を考えることによって、この回路の挙動をあらわす ODE をたてよ。
- 化学反応の時間的な進みかたについて ODE によるモデル化をおこないたい。このときに出てくる「反応速度」という概念について説明せよ。
- ある種の化学反応 — たとえば水素 (H_2) とヨウ素 (I_2) が気体の状態で反応する場合 — においては、反応の速度は分子が出会う頻度を直接反映

すると考えてよい。微小時間 Δt のあいだに水素やヨウ素の量がどれだけ変化するかを考えて、



という反応による各成分の濃度の時間変化をあらわす ODE をたてよ。

- 酵素の助けによって物質 A が物質 B に変化する反応を考える。素直に方程式をたてると 4 変数 1 階の ODE になるが、さまざまな手段を駆使して変数を減らすことにより、これを 1 変数 1 階の ODE に書き直せることを示せ。
- 被捕食者と捕食者 (ウサギとキツネ、ヒラメとサメなど) の数の時間的増減に関して Lotka-Volterra 方程式をたてるときの考え方について説明せよ。
- 伝染病の患者数の時間的増減をあらわす ODE をたてるときの考え方について説明せよ。
- 太陽のまわりをまわる惑星の運動方程式を、まず太字ベクトルで書き、次に極座標を用いて r と θ についての ODE の形に書き直せ。
- 原子核のまわりに束縛された電子の運動を、2 次元 Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi - \frac{e_*^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi \quad (1)$$

で考える。方程式 (1) の解を $\psi = F(r)G(\theta)$ と置いて代入し、 F および G についての ODE に書き直せ。

線形同次の ODE

- 次の ODE について、 $t \rightarrow +\infty$ での解の挙動が α の符号によってどのように異なるか説明せよ:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0. \quad (2)$$

- 次の ODE の一般解を求めたい:

$$\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \gamma x = 0 \quad (\alpha \neq 0). \quad (3)$$

ここで α, β, γ は実数の定数である。

- ◇ 基本解を適当に置いて式 (3) に代入すると 2 次方程式になることを示せ。

- ◇ この 2 次方程式が異なる実根をもつ場合について、微分方程式 (3) の一般解を示せ。
- ◇ 得られた 2 次方程式が複素共役な根をもつ場合について、微分方程式 (3) の一般解を示せ。ただし、結果は実数化すること。
- ◇ 得られた 2 次方程式が重根をもつ場合について、一般解の求めかたを説明せよ。

● 次の ODE の一般解を求めよ:

$$r^2 \frac{d^2 p}{dr^2} - 6p = 0. \quad (4)$$

● 次の ODE で、 θ についての周期境界条件 (周期 2π) が成り立つように μ の値を定めよ:

$$-\frac{d^2 G}{d\theta^2} = \mu G. \quad (5)$$

● 次の ODE の解を求めたい:

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} + \left(\lambda s - \frac{1}{4} s^2 - m^2 \right) F = 0. \quad (6)$$

ただしここで m は 0 以上の整数、 λ はある未知の定数である。

◇ 式 (6) は、 s が小さいところでは

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} - m^2 F = 0 \quad (7)$$

と近似される。この方程式の解を、 $s \rightarrow 0$ で解が発散しないという条件のもとで求めよ。

◇ 逆に s が大きいところでは、式 (6) は

$$\frac{d^2 F}{ds^2} - \frac{1}{4} F = 0 \quad (8)$$

と近似される。この方程式の解を、 $s \rightarrow +\infty$ で解が発散しないものとして求めよ。

◇ 領域 $0 < s < +\infty$ 全体での解を求めるため

$$F = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots) \times [\text{式 (7) の解}] \\ \times [\text{式 (8) の解}]$$

と置いて式 (6) に代入する。簡単化のため a_3 以降はすべてゼロになるものとし、結果を整理すると、ある行列 L を用いて

$$L \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9)$$

という固有値問題の形になることを示せ。

◇ 固有値問題 (9) を解いて、方程式 (6) の解 F を求めよ。

線形非同次の ODE

● 次の ODE の一般解を求めたい:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

◇ 特解を振動数 ω の三角関数と仮定して求めよ。また、この解法が破綻せずに使えるための条件について説明せよ。

◇ 上記の条件が成り立つ場合について、一般解を求めよ。

◇ 上記の条件が成り立たない場合は、特解をどう置いたらよいか? また、その場合の、 $t \rightarrow +\infty$ での挙動について説明せよ。

● 次の ODE の一般解を求めよ:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}. \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} + 2p = \cos t. \quad (12)$$

● 次の ODE を定数変化法で解け:

$$r \frac{du}{dr} - u = e^{2/r}. \quad (13)$$

$$x \frac{dy}{dx} + 3y = -\frac{1}{x^3}. \quad (14)$$

$$\frac{dz}{dt} + 3z = \cosh 3t. \quad (15)$$

● 方程式 (10) でちょうど $\omega = \sqrt{k/m}$ となる場合の解を定数変化法で求める手順を示せ。

● 次の ODE の解を求めたい:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + r \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \cos \omega_2 t. \quad (16)$$

ここで $L, r, C, \omega_1, \omega_2$ はそれぞれ正の定数であり、また r は小さいとする。

方程式 (16) の一般解は、時間とともに減衰する項と、右辺に同調する (定常応答する) 項との和であることを示せ。さらに、この解に基づいて、ラジオの選局のしくみについて説明せよ。

非線形の ODE

● 物質 X が物質 Y になる反応を考える。物質 X の濃度を $[X]$ であらわし、反応の速度は

$$-\frac{d[X]}{dt} = k[X]^2 \quad (17)$$

という ODE に従うものとする。この ODE の一般解を求めよ。

- 次の ODE の解のグラフを描け:

$$\frac{d[A]}{dt} = -\frac{k_2 E_0 [A]}{K_M + [A]} \quad (18)$$

ただし k_2, E_0, K_M はそれぞれ正の定数である。

- 物質 A と物質 B の反応を考える。この反応の速度は A と B の濃度の積に比例するものとし、また逆反応は無視できるものとするれば、濃度の時間変化は

$$-\frac{d}{dt}[A] = -\frac{d}{dt}[B] = k[A][B] \quad (19)$$

という ODE に従う。

- ◇ $[A] - [B]$ が保存量であることを示せ。
- ◇ 初期条件を

$$([A], [B])|_{t=0} = (a_0, b_0) \quad (a_0 \neq b_0)$$

として、 $[A]$ および $[B]$ の時間変化を求めよ。

- 次の ODE の一般解を、エネルギー積分を利用して求めよ:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = e^{-2u}. \quad (20)$$

- 次の ODE の解の様子を相平面上に図示せよ:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_1 - \gamma)x - \beta_1 xy \quad (21a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -(\alpha_2 + \gamma)y + \beta_2 xy \quad (21b)$$

ただし $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ はすべて正の定数、 γ はゼロまたは正の定数とする。また、 x および y は正の実数の範囲で考える。

ヒント: まずは固定点を求める。次に、右辺の値に基づき、 $(dx/dt, dy/dt)$ を示す小さな矢印を書き込んでいく。基本的には、計算しやすい位置 (たとえば矢印が $(0, *)$ または $(*, 0)$ になるような位置) を優先的に書き込んでいくとよい。

- 次の非線形 ODE について考える:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + y^3 = -\beta \frac{dy}{dt}. \quad (22)$$

ここで β はゼロまたは正の定数である。

- ◇ $\beta = 0$ としてエネルギー積分を求めよ。
- ◇ $\beta > 0$ の場合にはエネルギーは減少し続けることを示せ (これは y が最終的にゼロになることを示している)。

- 惑星の運動を 2 次元で考え、極座標を用いて運動方程式を解く。

◇ 次の 2 つの量が保存量であることを示せ:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (23a)$$

$$L = mr^2 \dot{\theta} \quad (23b)$$

◇ 式 (23a)(23b) から dt を消去して、 r と θ についての変数分離の式に直し、これから r を θ であらわす式を求めよ。

補充問題

ODE のたてかた

- 水槽 1 および水槽 2 に水が入っていて、それぞれ、ある法則にしたがって水の量が増えたり減ったりしている。

- ◇ 時刻 t における水槽 1 の水の量を V_1 とし、水槽 2 の水の量を V_2 とする。
- ◇ 水槽 1 には、時間 Δt のあいだに $Q_0 \Delta t$ だけの水が流入する (ここで Q_0 は正の定数)。
- ◇ 水槽 1 からは、時間 Δt のあいだに $q \Delta t$ だけの水が流出し、この水はそのまま水槽 2 に流入する。ここで q は水槽 1 の水底の水圧 p_1 と大気圧 p_0 の差に比例し、

$$q = k(p_1 - p_0), \quad p_1 = p_0 + \frac{\rho g V_1}{S_1}$$

という関係式が成立する。

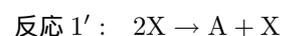
- ◇ 水槽 2 からは、時間 Δt のあいだに $q' \Delta t$ だけの水が流出する。ここで q' と水槽 2 の水底の水圧 p_2 のあいだには

$$q' = k' \sqrt{p_2 - p_0}, \quad p_2 = p_0 + \frac{\rho g V_2}{S_2}$$

という関係式が成立する。

これらの情報に基づき、 V_1 および V_2 の時間変化を記述する ODE をたてよ。

- 次のような素過程からなる化学反応を考える:



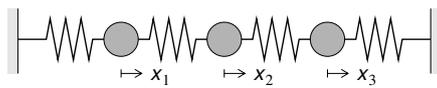
それぞれの素過程の反応速度は反応する物質の濃度の積に比例するものと仮定し、たとえば反応 1 によって生じる X の量を $\Delta_1[X]$ とすると

$$\Delta_1[X] = u_1 \Delta t, \quad u_1 = k_1[A][X]$$

と書けるものとする。他の素過程についても同様であるが、ただし比例係数は異なる (それぞれ k'_1, k_2, k_3 とする)。また、反応 2 および反応 3 の逆反応は無視できるものとする。

以上の前提に基づき、また $[A]$ は一定値 a_0 に保たれているものとして、 $[X]$ および $[Y]$ の時間変化をあらわす ODE をたてよ。

- 質量 m のおもり 3 つとバネ定数 k のバネ 4 つからなる 1 次元の振動系を考える。



- ◇ それぞれの質点の変位を x_1, x_2, x_3 とする。したがって、バネの伸びは、左から順に

$$\begin{aligned} \delta_{01} &= x_1, \\ \delta_{12} &= x_2 - x_1, \\ \delta_{23} &= x_3 - x_2, \\ \delta_{34} &= -x_3. \end{aligned}$$

- ◇ バネの張力は伸びに比例する: たとえば

$$S_{12} = k\delta_{12} = k(x_2 - x_1).$$

- ◇ それぞれのおもりは、自分につながっているバネを通じて隣のおもりから力を受ける。したがって、たとえば 1 番目のおもりは

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= F_{0 \rightarrow 1} + F_{2 \rightarrow 1} \\ &= -S_{01} + S_{12} \end{aligned} \quad (24)$$

という運動方程式に従う。

以上の情報に基づき、 (x_1, x_2, x_3) の時間変化を記述する ODE をたてよ。

固定点近傍での線形解析

- 次の ODE の固定点まわりの挙動を知りたい:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_1 - \varepsilon_1 x)x - \beta_1 xy \quad (25a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_2 y + \beta_2 xy. \quad (25b)$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \varepsilon_1$ はすべて正の定数であり、 x および y は正の実数の範囲で考える。

- ◇ 固定点 (x_*, y_*) を求めよ。
- ◇ 固定点のまわりでの微小な変動を考えて ODE を線形化せよ。
- ◇ 線形化した方程式を固有値問題に持ち込み、解が時間経過とともに固定点に近付いていくか、それとも離れていくかを判定せよ。

完全微分

- 1 次微分形式とは

$$p dx + q dy \quad (26)$$

のような形の式のことである。さて、1 次微分形式が完全微分であるとはどのようなことをいうのか? また、 $p dx + q dy$ が完全微分であるか否かを判定する方法について説明せよ。

- 完全微分を利用して、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \quad (27)$$

の解を $U(x, y) = \text{const.}$ の形で求めよ。

ODE を解く練習

- 次の ODE の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 3 \cos t. \quad (28)$$

- 次の ODE の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 5 \sin 2t. \quad (29)$$

- 次の ODE の一般解を求めよ:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - 9u = 5r^2. \quad (30)$$

- 次の ODE の一般解を求めよ:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - 9u = r^{-3}. \quad (31)$$

- 次の ODE の初期値問題を解け:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-2t}, \quad x|_{t=0} = 0. \quad (32)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-2y}, \quad y|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = e^{-2z}, \quad z|_{t=0} = \log 2, \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (34)$$