

常微分方程式 例題集 (2) 解説

大信田 丈志 (応用数理工学科) 2009-08-02

はじめに注意

ここで解説していない問題が重要でないというわけではない。重要な例題であっても、講義ノートを見れば分かるようなものは省略している。講義ノートをしっかり確認しておくこと。

ODE のたてかた

水槽 1 および水槽 2 に水が入っていて、それぞれ、ある法則にしたがって水の量が増えたり経ったりしている。

- 時刻 t における水槽 1 の水の量を V_1 とし、水槽 2 の水の量を V_2 とする。
- 水槽 1 には 時間 Δt のあいだに $Q_0 \Delta t$ だけの水が流入する (Q_0 は正の定数)。
- 水槽 1 からは 時間 Δt のあいだに $q \Delta t$ だけの水が流出し、この水は全て水槽 2 に流入する。ここで q は水槽 1 の水底の水圧 p_1 と大気圧 p_0 の差に比例し、

$$q = k(p_1 - p_0), \quad p_1 = p_0 + \frac{\rho g V_1}{S_1}$$

という関係式が成立する。

- 水槽 2 からは、時間 Δt のあいだに $q' \Delta t$ だけの水が流出する。ここで q' と水槽 2 の水底の水圧 p_2 のあいだには

$$q' = k' \sqrt{p_2 - p_0}, \quad p_2 = p_0 + \frac{\rho g V_2}{S_2}$$

という関係式が成立する。

これらの情報に基づき、 V_1 および V_2 の時間変化を記述する ODE をたてよ。

水槽 1 の水の量 V_1 は、時間 Δt のあいだに流入したぶんだけ増加するはずである (流出は「負の流入」と考える)。与えられている情報から

$$V_1|_{t+\Delta t} = V_1|_t + Q_0 \Delta t - q \Delta t$$

したがって

$$\frac{V_1|_{t+\Delta t} - V_1|_t}{\Delta t} = Q_0 - q$$

であり、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_0 - q \quad (*A)$$

となる。水槽 2 についても同様に考えると

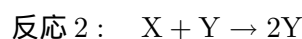
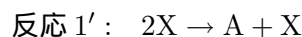
$$\frac{dV_2}{dt} = q - q' \quad (*B)$$

である。与えられた関係式を用いて式 (*A) および式 (*B) の右辺を書き直し、以下の結果を得る:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_0 - \frac{k \rho g V_1}{S_1}, \quad (*C1)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{k \rho g V_1}{S_1} - k' \sqrt{\frac{\rho g V_2}{S_2}}. \quad (*C2)$$

次の素過程からなる化学反応を考える:



それぞれの素過程の反応速度は反応する物質の濃度の積に比例し、たとえば反応 1 によって生じる X の量を $\Delta_1[X]$ とすると

$$\Delta_1[X] = u_1 \Delta t, \quad u_1 = k_1[A][X]$$

と書けるものとする。他の素過程についても同様で、ただし比例係数は異なる (それぞれ k'_1, k_2, k_3 とする)。また、反応 2 および反応 3 の逆反応は無視できるものとする。以上の前提に基づき、また $[A]$ は一定値 a_0 に保たれているものとして、 $[X]$ および $[Y]$ の時間変化をあらわす ODE をたてよ。

微小時間 Δt のあいだに $[X]$ は $\Delta[X]$ だけ増加するものとする:

$$\Delta[X] = [X]_{t+\Delta t} - [X]_t.$$

ここで X は反応 1 によって 1 つ増加し、その逆反応 1' によって 1 つ減少、また反応 2 によっても 1 つ減少するから

$$\begin{aligned}\Delta[X] &= \Delta_1[X] - \Delta_{1'}[X] - \Delta_2[X] \\ &= (u_1 - u'_1 - u_2) \Delta t.\end{aligned}$$

両辺を Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{d[X]}{dt} = u_1 - u'_1 - u_2 \quad (*D)$$

となる。同様に物質 Y の濃度変化を考えると

$$\frac{d[Y]}{dt} = u_2 - u_3. \quad (*E)$$

ここで、それぞれの素過程の反応速度は反応する物質の濃度の積に比例すると仮定しているので、

$$\begin{aligned}u_1 &= k_1[A][X] = k_1 a_0[X] \\ u'_1 &= k'_1[X]^2 \\ u_2 &= k_2[X][Y] \\ u_3 &= k_3[Y]\end{aligned}$$

と書ける。これを式 (*D)(*E) に代入して整理し、

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1 a_0[X] - k'_1[X]^2 - k_2[X][Y] \quad (*F1)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2[X][Y] - k_3[Y] \quad (*F2)$$

を得る。

相平面による解析

次の ODE の解の様子を相平面上に図示せよ:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_1 - \gamma)x - \beta_1 xy \quad (21a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -(\alpha_2 + \gamma)y + \beta_2 xy \quad (21b)$$

ただし $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ はすべて正の定数、 γ はゼロまたは正の定数とする。また、 x および y は正の実数の範囲で考える。

まず固定点を求める。範囲を $x > 0$ かつ $y > 0$ に限定すると、式 (21a) の左辺がゼロとなる条件は

$$y = \frac{\alpha_1 - \gamma}{\beta_1} \quad (*H)$$

であり、式 (21b) の左辺がゼロとなる条件は

$$x = \frac{\alpha_2 + \gamma}{\beta_2} \quad (*I)$$

である。これらの 2 つの条件を同時に満たす点が固定点となる。この点を (x_*, y_*) としよう。

次に、式 (21) の右辺をそれぞれ u および v と置き、 $(dx/dt, dy/dt) = (u, v)$ を示す小さな矢印を相平面に書き込む。式 (*H) を満たす線上では

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (0, v) \quad (*J)$$

となって、矢印は v の符号に応じて上向きまたは下向きとなり、その符号は x が固定点のどちら側にあるかによって決まる。同様に、式 (*I) を満たす線上では

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (u, 0) \quad (*K)$$

となって、矢印は右向きまたは左向きとなる。これらのことを手がかりにして、相平面上の流れの様子が明らかになるように小さな矢印をいくつも記入していけばよい。

次の ODE の固定点近傍での挙動を考える:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_1 - \varepsilon_1 x)x - \beta_1 xy \quad (25a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_2 y + \beta_2 xy. \quad (25b)$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \varepsilon_1$ はすべて正の定数であり、 (x, y) は正の実数の範囲で考える。

- 固定点 (x_*, y_*) を求めよ。
- 固定点のまわりでの微小な変動を考えて ODE を線形化せよ。
- 線形化した方程式を解析し、時間が経過するにつれて解が固定点に近付いていくか離れていくかを判定せよ。

固定点を求めると

$$x_* = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad y_* = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \varepsilon_1}{\beta_1 \beta_2}$$

である。固定点の近傍での微小な変動を考えて、

$$(x, y) = (x_*, y_*) + (\xi, \eta) \quad [(\xi, \eta) \text{ は微小}]$$

と置いて式 (25) に代入し、2 次の項を無視すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 x_* & -\beta_1 x_* \\ \beta_2 y_* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (*M)$$

という線形同次方程式になる。基本解を

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\sigma t}$$

と置いて方程式 (*M) に代入すると、 t が消えて

$$\begin{bmatrix} -\sigma - \varepsilon_1 x_* & -\beta_1 x_* \\ \beta_2 y_* & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*N)$$

を得る。式 (*N) の形の方程式は、

- 左辺の行列が正則なら、解は自明解すなわち $(a, b) = (0, 0)$ に限られ、非自明解はない
- 左辺の行列が特異なら非自明解をもつ

ということが分かっている*。いま求めたいのは式 (25) で固定点からの変動がある場合で、それは式 (*N) の非自明解に相当する。非自明解が存在するためには行列が特異である必要があり、行列が特異かどうかはデタミナントを計算すれば判定できる。すなわち、非自明解が存在する条件は

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma - \varepsilon_1 x_* & -\beta_1 x_* \\ \beta_2 y_* & -\sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (*O)$$

である。式 (*O) を 2 次方程式の解の公式で解いてみると (詳しい計算は省略するが)、判別式の正負にかかわらず、すべての場合に σ の実部は負となり、したがって (ξ, η) は $t \rightarrow +\infty$ でゼロに収束する。すなわち、解は固定点に近付いていくことが分かる。

定数係数の線形 ODE の解法

線形同次の方程式でかつ係数が定数であれば、基本解を $\exp(\text{なんとか})$ と置く方法で解ける。線形非同次の場合は、何らかの手段で特解を求め、線形同次方程式に帰着させて一般解を求める。

次の ODE の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 3 \cos t. \quad (28)$$

定数係数の線形非同次 ODE であり、非同次項が $3 \cos t$ なので、特殊解として

$$x = x_p = P \cos t + Q \sin t$$

という形が予想できる。式 (28) に代入し、 t の恒等式とみて両辺の係数を比較すると、 $P = 1$ 、 $Q = 0$ と定まり、したがって特殊解として

$$x = x_p = \cos t \quad (*P)$$

を得る。次に、 $x = x_h + x_p$ と置いて方程式 (28) に代入し、式 (*P) を引いて整理すると

$$\frac{d^2 x_h}{dt^2} + 4x_h = 0$$

という線形同次方程式になる。視察により解は

$$x_h = A \cos 2t + B \sin 2t$$

となり (A および B は任意定数)、したがって

$$x = x_h + x_p = A \cos 2t + B \sin 2t + \cos t$$

を得る。(検算略)

次の ODE の一般解を求めよ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 5 \sin 2t. \quad (29)$$

式 (28) と同じ定数係数の線形非同次 ODE であり、非同次項が $5 \cos 2t$ なので、特殊解として

$$x = x_p = P \cos 2t + Q \sin 2t$$

という形が予想できる。しかし、実際に方程式 (29) に代入してみると、左辺がゼロになってしまい、等号を成立させることができない。そこで、置き方を変えて、試しに

$$x = x_p = Pt \cos 2t + Qt \sin 2t \quad (*Q)$$

を代入し、 t の恒等式と見て係数を比較すると

$$x = x_p = -\frac{5}{4} t \cos 2t$$

という特解が見つかる。あとは $x = x_p + x_h$ と置いて同次方程式に帰着させれば一般解が求められる (具体的な計算は省略)。

おまけ: 式 (*Q) の形を思いつかない場合には

- 定数変化法
- 特殊解を $x_p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ と置く
- 非同次項を $5 \sin((2 + \epsilon)t)$ として $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとる

などの方法がある。

*ここが分からない人は線形代数の本と ODE の講義ノートを見直しておくべきだ。絶対に。

定数係数でない線形 ODE

これにはさまざまな例がある[†]。また、最初から固有値問題の形で出てくことも多い。例題プリントでは式 (6) がその典型的な例である。

次の ODE の一般解を求めよ:

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} - m^2 F = 0. \quad (7)$$

ただし m は 0 以上の整数である。

方程式 (7) は、定数係数でない線形 ODE のなかで最も基本となる Euler–Cauchy の微分方程式と呼ばれるものの一例である。線形同次の ODE なので、一般解は基本解の線形結合で書けるはずである。しかし、定数係数ではないので、基本解を $\exp(\text{なんとか})$ と置いても失敗に終わる。

式 (7) を解くには、基本解を $F = s^\alpha$ と置いて代入する。代入すると r が消えて

$$\alpha^2 - m^2 = 0 \quad (*R)$$

という 2 次方程式となり、根は $\alpha = \pm m$ である。

もし $m > 0$ なら、 s^m および r^{-m} という 2 つの基本解が得られたことになる。一般解は 2 つの基本解の線形結合で

$$F = As^m + Bs^{-m} \quad (m > 0) \quad (*S)$$

と書ける (ここで A, B は任意定数)。

方程式 (*R) が重根をもつ場合は特別扱いが必要となる。すなわち、 $m = 0$ のとき、式 (*S) は基本解が線形独立でない (かぶってしまう) ので、一般解としては不十分である。この場合、式 (7) に戻って $m = 0$ を代入し、 $dF/ds = p$ と置くと、変数分離で解ける形になる。結果は次のとおり:

$$F = A + B \log s \quad (m = 0). \quad (*T)$$

なお「 F が原点 ($s = 0$) で発散しない」という条件がついている場合は、式 (*S)・式 (*T) とともに $B = 0$ となり、その場合は両方まとめて $F = As^m$ と書けることになる。

次の ODE の一般解を求めよ:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - 9u = 5r^2 \quad (30)$$

線形非同次方程式なので、何らかの方法で特殊解を見つける必要がある。非同次項が $5r^2$ であることから、特殊解を

$$u = u_p = ar^k \quad (\text{ここで } a \text{ も } k \text{ も定数})$$

のように予想し、代入して、等号が成立するような a および k の値をさがす。その結果、

$$u = u_p = -r^2$$

という特殊解が見つかる。あとは $u = u_h + u_p$ と置いて式 (30) に代入し、線形同次方程式に帰着させて一般解を求めればよい。結果は

$$u = u_h + u_p = Ar^3 + Br^{-3} - r^2$$

となる (ここで A, B は任意定数)。

次の ODE の一般解を求めよ:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - 9u = r^{-3}. \quad (31)$$

特殊解を $u_p = ar^k$ と置いてもうまくいかない。このような場合は、たとえば

$$u = ar^{-3}, \quad a = a(r)$$

と置いて代入する。代入した結果は

$$-5r \frac{da}{dr} + r^2 \frac{d^2 a}{dr^2} = 1$$

となり、ここでさらに $da/dr = v$ と置くと変数分離できる形になる。途中の計算を省略し、結果のみを示す:

$$u = Ar^3 + Br^{-3} - \frac{1}{6} r^{-3} \log r. \quad (*U)$$

[†]興味がある人は、教科書 p.226 の問題 4.4 を見るとよい。