

2 階微分の差分化

たとえば $y = y(x)$ に対し、 $x_n = x_0 + n\Delta x$, $y_n = y(x_n)$ として

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \simeq \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} - \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n}{\Delta x^2}$$

2 階微分の記号に即して言えば、分母の dx^2 は単なる Δx の 2 乗に相当するが、分子の $d^2 y$ は何かの 2 乗というわけではなく、階差の階差（2 階差分）をあらわす。

簡単な 2 階 ODE

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = g (= \text{const.})} \quad (1)$$

積分による解法

式 (1) の両辺を t で積分して

$$\frac{dz}{dt} = \int g dt = gt + C_1. \quad (2)$$

ここで C_1 は積分定数。

さらに式 (2) の両辺を t で積分して

$$z = \int (gt + C_1) dt = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \quad (3)$$

ここで C_2 は第 2 の積分定数。

差分による解法

式 (1) を、 $z_n = z(t_n)$, $t_n = n\Delta t$ として差分化する（簡単化のため $t_0 = 0$ としている）：

$$\frac{z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n}{\Delta t^2} = g$$

すなわち

$$z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n = g \Delta t^2. \quad (4)$$

式 (4) の左辺は $(z_{n+1} - z_n) - (z_n - z_{n-1})$ という“階差の階差”であることを思い出し、また式 (4) の右辺が定数であることに着目すると、 $\{z_{n+1} - z_n\}$ は公差 $g \Delta t^2$ の等差数列となることが分かる：

$$z_{n+1} - z_n = V_0 \Delta t + g \Delta t^2 n. \quad (5)$$

ここで V_0 は初速度。

式 (5) は $\{z_n\}$ の階差数列だから、和分によって z_n を求めることができ、

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (C + g \Delta t^2 k) \\ &= z_0 + (V_0 \Delta t)n + g \Delta t^2 \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) で $n \rightarrow +\infty$, $t_n \rightarrow t$ として

$$z_n \rightarrow z(t) = z_0 + V_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (7)$$

を得る。定数の名前が異なる（ z_0 および V_0 という“初期条件らしい”名前になっている）ことを除けば、式 (3) と全く同じ結果になる。