

常微分方程式 補足資料: 微分方程式の差分による解法

大信田 (応用数理工学科) 2009-04-27

数値解の例

$F(q) = 2 \sin q - 1$ とする。微分方程式

$$\frac{dq}{dt} = F(q) \quad (1)$$

に対し、初期条件 $q|_{t=0} = 1.0$ を満たす数値解を求めて図示せよ。

時間 t を、初期時刻 (今の場合 $t_0 = 0$) から始めて微小間隔 Δt ごとに区切り、

$$t_n = n\Delta t, \quad q_n = q(t_n)$$

とする。これにより式 (1) は

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = F(q_n) = 2 \sin q_n - 1 \quad (2)$$

のように書き直され (これを差分方程式と言う)、分母を払って式変形することにより

$$q_{n+1} = q_n + F(q_n) \Delta t \quad (3)$$

を得る*。これは数列 $\{q_n\}$ についての漸化式である。

さて、初期条件として $q_0 = q|_{t=0} = 1.0$ が既に与えられていることに注目し、式 (3) で $n = 0$ とすると

$$q_1 = q_0 + F(q_0) \Delta t = q_0 + (2 \sin q_0 - 1) \Delta t \quad (4)$$

表 1: 差分すなわち漸化式 (3) による微分方程式 (1) の解の数値計算 ($\Delta t = 0.1$)

t	q	F	$F\Delta t$
0.00000	1.00000	0.68294	0.06829
0.10000	1.06829	0.75276	0.07528
0.20000	1.14357	0.82024	0.08202
0.30000	1.22559	0.88201	0.08820
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

*ここでは微分方程式 (1) が先に与えられているものとしているが、本当は話は逆であることが多い。たいていは、まず時間を Δt ごとに区切って式 (3) の形で考え、そのあとで微分方程式に直すという順番になる。

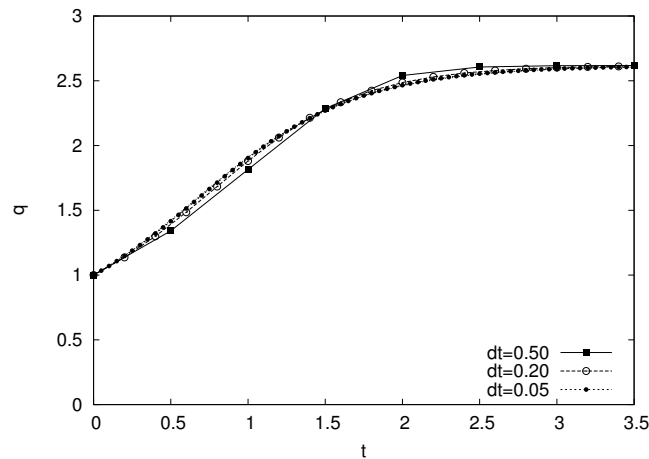


図 1: 漸化式 (3) から求めた $\{q_n\}$ が微分方程式 (1) の解に収束する様子

となる。既に q_0 は分かっているので、式 (4) の右辺の値は既知となり、 q_1 が計算できる。次に、式 (3) で $n = 1$ として

$$q_2 = q_1 + F(q_1) \Delta t = q_1 + (2 \sin q_1 - 1) \Delta t \quad (5)$$

となるが、 q_1 は既に求まっているので、 q_2 がこれから計算できる。この手順を何度も何度もひたすら繰り返せばよい。このようにして、たとえば $\Delta t = 0.1$ として数値解を求めると、表 1 のような結果が得られる。

横軸に時間 t をとり、縦軸に q をとって、結果を折れ線グラフに描くと、たとえば図 1 のようになる。時間刻み Δt を非常に小さくした極限で、この折れ線は (少なくとも今の場合) 一定の曲線に収束する[†]。この曲線 (に対応する関数) が初期値問題の解を与える。

[†]ただし $F(q, t)$ が変な関数であれば収束しない可能性もあるので、いちおう注意が必要である。

解析解の例

未知関数 $v = v(t)$ についての微分方程式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \beta v \quad (6)$$

を差分方程式に直し、解析解を求めよ (初期条件を $v|_{t=0} = v_0$ とする)。

差分方程式に直すと

$$m \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = mg - \beta v_n \quad \text{すなわち} \quad v_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right) v_n + g \Delta t \quad (7)$$

となる。右辺の最後の $g \Delta t$ さえなければ等比数列の漸化式になる。この邪魔な項を消すためには、ちょっとした工夫が必要である。

仮に数列 $\{v_n\}$ が、式 (7) を満たし、なおかつ一定の値をとったとしよう。このような値のことを、式 (7) の固定点という。固定点を v_* とすると

$$v_* = \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right) v_* + g \Delta t \quad (8)$$

であり、これを満たす v_* は $v_* = mg/\beta$ と求められる。つまり

$$\frac{mg}{\beta} = \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right) \frac{mg}{\beta} + g \Delta t \quad (8')$$

という式が成り立つ。

式 (7) から式 (8') を辺々引き、 $v_n - v_* = w_n$ と置くと

$$w_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right) w_n \quad (9)$$

という等比数列の漸化式になる。ここで $\{w_n\}$ の初項は $w_0 = v_0 - mg/\beta$ だから

$$w_n = w_0 \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right)^n = \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right)^n \quad (10)$$

したがって

$$v_n = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\beta}{m} \Delta t\right)^n. \quad (11)$$

連続極限 ($n \rightarrow +\infty, \Delta t \rightarrow +0, t_n \rightarrow t$) をとり

$$v_n \rightarrow v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) \quad (12)$$

を得る。あとは式 (6) に代入して検算すればよい。