

力学演習 II シミュレーション (1)

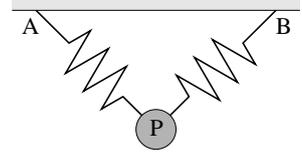
大信田丈志 (応用数理工学科) 2008-10-30

10月の課題

質量 m の質点 P が、同一の特性をもつふたつのバネによって天井からつるされている。バネの自然長を ℓ とし、バネ定数を k とする。また、バネの力は、両端間を結ぶ直線にそって働くものとしよう (曲げモーメントは無視)。

適当に記号を設定すると、P の運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = S_1 \mathbf{e}_{PA} + S_2 \mathbf{e}_{PB} + mg \quad (\#1)$$



と書ける。ただし \mathbf{e}_{PA} は P から A に向かう単位ベクトル、 \mathbf{e}_{PB} は P から B に向かう単位ベクトルである。

- [1] 水平方向に x 軸を、鉛直下向きに y 軸をとり、点 A の位置を $(-a, 0)$ 、点 B の位置を $(+a, 0)$ とする。さらに、簡単化のため、P の運動は y 軸上に限定されると仮定し、P の位置を $\mathbf{r} = (0, y)$ としよう。以上のことを用いて運動方程式 (#1) を具体的に書き直し、 y についての常微分方程式の形にまとめよ。
- [2] 長さの基準量として ℓ を、時間の基準量として $\tau = \sqrt{m/k}$ をとり、上記 [1] で得られた方程式を無次元化せよ*。さらに、運動量 p (無次元化すると $\tilde{p} = p/(m\ell\tau^{-1})$ となる) を用いて、方程式を 1 階化せよ。
- [3] 指定されたパラメータの値[†]に対し、初期条件をさまざまに変えて数値解を求め、平衡点近傍での微小振動が生じるような初期条件をさがしだせ。さがしだした初期条件に対し、 $0 \leq t \leq 10.0\tau$ の範囲で数値解を求め、次の 2 つの方法でグラフ化せよ:

- 位置の時間変化を示すグラフ (横軸に時間をとり、縦軸に位置座標をとる)
- 位相平面 (横軸に位置座標をとる、縦軸に速度または運動量をとる)

また、2 つのグラフの相互関係が分かるように、対応する点には何らかの記号を書き込んでおくこと。

- [4] 求めた数値解はどれくらい正しいか、理論的に検討せよ (以下の方法を両方とも試してみること):
 - 微小振幅近似を用いて運動方程式 (#1) を解き、その解をグラフ化して、数値解のグラフと重ねてみる。
 - 運動方程式 (#1) のエネルギー積分を求め、運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー U および全エネルギー $K + U$ の値を数値解から時刻ごとに算出して、その値を時刻 t に対してプロットする。
- [5] おまけ課題: 質点 P の動きが縦方向だけであるという制約条件を外し、P は 2 次元的に動くものと考えた場合の数値解を求めよ。パラメータの値や初期条件などは好きなように変えてよいが、結果としてなるべく興味深い運動が生じるように設定せよ (どういう点が興味深いのか説明すること)。

他の課題に白紙答案 (またはそれに近いもの) がある場合は、おまけ課題は採点しない。

以上の課題を個人ごとにレポートにまとめ (「おまけ課題」は省いてもよい)、担当教員または事務室前のレポート箱に提出せよ。しめきりは 11月13日(木)午後5時 とする。

配点: [1][2] 各 20 点, [3][4] 各 30 点
おまけ課題 [5] = 30 点

*式に現れるすべての量が無次元になるように変数変換する。今の場合だと、 $y = \tilde{y}\ell$ とか $t = \tilde{t}\tau$ とかを代入し、さらに両辺を適当な定数で割って無次元にする。正しく無次元化すれば、係数もすべて無次元になるはずで、 a/ℓ とか $mg/k\ell$ とかいった組み合わせが現れる。

[†]個人ごとに異なる値を指定する。力学演習のホームページ <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/Mech/> を見よ。