

力学演習 II シミュレーション (2)

大信田丈志 (応用数理工学科) 2008-11-20

11月の課題

質量 m の剛体振り子を作ってみる。摩擦や空気抵抗などが無い場合の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell_G \sin\theta \quad (\heartsuit)$$

のように書ける。ここで $\theta = \theta(t)$ は剛体の向きをあらわす変数、 I は軸まわりの慣性モーメント、 ℓ_G は軸から剛体の重心までの距離、 g は重力加速度である。

[1] 以下の条件に従い、独創的な剛体振り子を自分で考えて、慣性モーメント I の値を計算し、微小振動の場合の固有角振動数 ω_n および周期 T を求めよ。計算過程においては単位も式の一部として扱うこと。

- 振り子の形については、なるべく独創的なものを考えること。あまりにも工夫のないもの(ただの棒など)は評価しない。多数のレポートが同じ形の振り子を出してきた場合は評点を下げる場合がある。
- 振り子の寸法は、3とおりの場合(大・中・小)を考え、それぞれについて ω_n を求めること*。
- 振り子の質量は根拠なしに決めるのではなく、寸法および素材の密度から計算すること。素材は、木材や鉄など、固体の材料なら何を選んでかまわない。また、3つの相似形の振り子のうち、大は2kg以上で持ち運び可能な範囲、小は1kg未滿、中はその中間になるように寸法を設定すること。

[2] 振幅が微小でない場合について調べるために、運動方程式(♡)の数値解を求めたい。ただし、プログラムに一般性をもたせるため、時間を $\tilde{t} = \omega_n t$ (無次元時間)に変換してから数値解を求めるようにする。

2次精度以上の数値解を求めるプログラム(Fortran プログラムでも人間が電卓で実行する手順書でも可)を作成し、説明を書き込んだものを提出せよ[†]。さらに、何らかの方法で、このプログラムによる計算結果の正しさを検証せよ(ヒント: 10月の課題を参考にする)。

[3] 上記 [1] で考えた振り子について、振幅が60度および90度の場合の周期を求めよ。結果は、まず [2] のプログラムを用いて無次元周期 \tilde{T} の形で求め、次に [1] の ω_n を用いて次元のある時間に換算すること。

[4] 振り子を作って実験してみたところ、わずかな抵抗が軸受けなどに存在するために、振幅が少しずつ減少していくのが観察された。初期(0周期め)の振幅を A_0 として実験したところ、 n 周期めの振幅は A_n になったとする(個人ごとに異なる値を力学演習のホームページ[‡]に示すので、それを用いること)。この場合について、抵抗を含む運動方程式をたてて数値解を求め、解の軌道を位相平面上に図示し解説せよ。ただし、抵抗の値は、与えられた条件に合うように定めるものとし、その結果についても説明すること。

[5] おまけ課題: この振り子に電気回路とコイルを組み合わせて、振動に合わせて磁場による外力がかかるようにした。これにより、式(♡)の右辺に $(a - b\theta^2)\dot{\theta}$ のような項が付け加えられる。この場合の数値解を何通りか求めて、位相平面上に解軌道を図示し、リミットサイクルが生じることを示せ。

他の課題に白紙答案(またはそれに近いもの)がある場合は、おまけ課題は採点しません。

以上の課題を個人ごとにレポートにまとめ(「おまけ課題」は省いてもよい)、担当教員または事務室前のレポート箱に提出せよ。しめきりは 12月15日(月)午後5時 とする。

配点: [1]-[4] 各 25 点
おまけ課題 [5] = 30 点

*相似形であることをうまく利用すると計算量を減らせるが、その具体的な方法はここでは説明しない。各自で考えて工夫すること。

[†]Fortran プログラムを提出する場合は、メモ帳や Word に貼りつけるのではなく、実際の Fortran プログラムを直接そのまま印刷する。

[‡]<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/Mech/>