

力学演習 II シミュレーション (3)

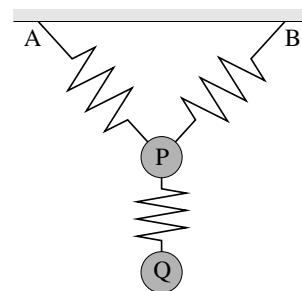
大信田丈志 (応用数理工学科) 2008-12-25

12月・1月の課題

10月の課題で考えた系に質点 Q を追加し、右の図のように配置する。バネの性質は3つとも同一である (自然長 l , バネ定数 k)。また、P も Q も質量は等しい。適当に記号を設定すると、それぞれの質点の運動方程式は

$$\text{質点 P: } m \frac{d^2 \mathbf{r}_P}{dt^2} = S_1 \mathbf{e}_{PA} + S_2 \mathbf{e}_{PB} + S_3 \mathbf{e}_{PQ} + mg \quad (\#1)$$

$$\text{質点 Q: } m \frac{d^2 \mathbf{r}_Q}{dt^2} = S_3 \mathbf{e}_{QP} + mg \quad (\#2)$$



と書ける。ただし \mathbf{e}_{PA} は P から A に向かう単位ベクトルであり、 \mathbf{e}_{PB} , \mathbf{e}_{PQ} , \mathbf{e}_{QP} も同様である。

- [1] 10月と同様に、水平方向に x 軸を、鉛直下向きに y 軸をとり、点 A の位置を $(-a, 0)$, 点 B の位置を $(+a, 0)$ とする。さらに、簡単化のため、P も Q も運動は y 軸上に限定されると仮定し、P の位置ベクトルを $\mathbf{r}_P = (0, y_P)$, Q の位置ベクトルを $\mathbf{r}_Q = (0, y_Q)$ としよう。以上のことを用いて運動方程式 (#1)(#2) を具体的に書き直し、 y_P および y_Q についての常微分方程式の形にまとめよ。

- [2] 上記 [1] で得られた方程式の数値解を求めるプログラムを作成せよ (Fortran プログラムでも人間が電卓で実行する手順書でも可)。なお、以下の条件を満たすこと:

- 微小振動に限定しない。振幅が有限であっても数値解を求められるようにする。
- 精度は 2 次精度以上。
- 数値解の正しさを検証できるように、エネルギーの値を計算して出力する機能を組み込む。

- [3] 比較のため、運動方程式を解析的に解くことを考える。指定されたパラメータの値* に対し、何らかの方法で平衡点を数値的に求め、平衡点近傍での微小振動を考えて方程式を線形化することにより、解析解を

$$\begin{bmatrix} y_P \\ y_Q \end{bmatrix} = (A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} + (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \quad (\#3)$$

のような形で求めよ。(もちろん * には具体的な数値が入る。また、 ω_1, ω_2 も小数で値を求めること。)

- [4] いくつかの初期条件に対して数値解を求め、解析解と重ねてグラフ化[†]することにより、次のことを示せ:

- 振幅が微小なら、数値解と解析解の差は微小である。ただし、時間経過とともに差は少しずつ増える。
- 振幅が大きい場合は両者の差は大きい。

- [5] おまけ課題: 式 (#3) において * であらわされている 2 つのベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする。たとえ微小振幅近似が適用できず、式 (#3) が解にならないような場合でも、 (y_P, y_Q) は、やはり \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 の線形結合で $(y_P, y_Q) = \varphi_1 \mathbf{p}_1 + \varphi_2 \mathbf{p}_2$ のようにあらわせるはずである。上記 [4] で微小振幅および有限振幅の場合に求めた数値解のデータをもとに、それぞれの時刻での φ_1 および φ_2 の値を計算せよ (ヒント: 直交性)。得られた φ_1 および φ_2 をそれぞれ t の関数として図示し、図から分かることについて考察せよ。

他の課題に白紙答案 (またはそれに近いもの) がある場合は、おまけ課題は採点しない。

以上の課題を個人ごとにレポートにまとめ (「おまけ課題」は省いてもよい)、担当教員または事務室前のレポート箱に提出せよ。しめきりは 1月22日(木)午後5時 とする。

配点: [1][2] 各 20 点, [3][4] 各 30 点
おまけ課題 [5] = 30 点

*個人ごとに 10 月と同じ値を用いる。力学演習のホームページ <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/Mech/> を見よ。

[†]運動の様子をイメージしやすいように、 $y_P(t)$ のグラフと $y_Q(t)$ のグラフを上下に並べ、同じ時刻どうしを対応させて示すとよい。