

力学演習 II シミュレーション (3)

大信田丈志 (応用数理工学科) 2008-12-25

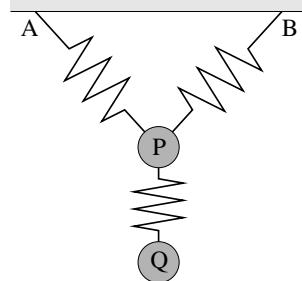
12月・1月の課題

10月の課題で考えた系に質点Qを追加し、右の図のように配置する。バネの性質は3つとも同一である（自然長 ℓ 、バネ定数 k ）。また、PもQも質量は等しい。

適当に記号を設定すると、それぞれの質点の運動方程式は

$$\text{質点 P: } m \frac{d^2 \mathbf{r}_P}{dt^2} = S_1 \mathbf{e}_{PA} + S_2 \mathbf{e}_{PB} + S_3 \mathbf{e}_{PQ} + mg \quad (\#1)$$

$$\text{質点 Q: } m \frac{d^2 \mathbf{r}_Q}{dt^2} = S_3 \mathbf{e}_{QP} + mg \quad (\#2)$$



と書ける。ただし \mathbf{e}_{PA} はPからAに向かう単位ベクトルであり、 \mathbf{e}_{PB} 、 \mathbf{e}_{PQ} 、 \mathbf{e}_{QP} も同様である。

[1] 10月と同様に、水平方向に x 軸を、鉛直下向きに y 軸をとり、点Aの位置を $(-a, 0)$ 、点Bの位置を $(+a, 0)$ とする。さらに、簡単化のため、PもQも運動は y 軸上に限定されると仮定し、Pの位置ベクトルを $\mathbf{r}_P = (0, y_P)$ 、Qの位置ベクトルを $\mathbf{r}_Q = (0, y_Q)$ としよう。以上のことを使って運動方程式(#1)(#2)を具体的に書き直し、 y_P および y_Q についての常微分方程式の形にまとめよ。

[2] 上記[1]で得られた方程式の数値解を求めるプログラムを作成せよ（Fortranプログラムでも人間が電卓で実行する手順書でも可）。なお、以下の条件を満たすこと：

- 微小振動に限定しない。振幅が有限であっても数値解を求められるようにする。
- 精度は2次精度以上。
- 数値解の正しさを検証できるように、エネルギーの値を計算して出力する機能を組み込む。

[3] 比較のため、運動方程式を解析的に解くことを考える。指定されたパラメータの値*に対し、何らかの方法で平衡点を数値的に求め、平衡点近傍での微小振動を考えて方程式を線形化することにより、解析解を

$$\begin{bmatrix} y_P \\ y_Q \end{bmatrix} = (A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} + (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix} \quad (\#3)$$

のような形で求めよ。（もちろん*には具体的な数値が入る。また、 ω_1, ω_2 も小数で値を求めるこ。）

[4] いくつかの初期条件に対して数値解を求め、解析解と重ねてグラフ化[†]することにより、次のことを示せ：

- 振幅が微小なら、数値解と解析解の差は微小である。ただし、時間経過とともに差は少しづつ増える。
- 振幅が大きい場合は両者の差は大きい。

[5] おまけ課題：式(#3)において*であらわされている2つのベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする。たとえ微小振幅近似が適用できず、式(#3)が解にならないような場合でも、 (y_P, y_Q) は、やはり \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 の線形結合で $(y_P, y_Q) = \varphi_1 \mathbf{p}_1 + \varphi_2 \mathbf{p}_2$ のようにあらわせるはずである。上記[4]で微小振幅および有限振幅の場合に求めた数値解のデータをもとに、それぞれの時刻での φ_1 および φ_2 の値を計算せよ（ヒント：直交性）。得られた φ_1 および φ_2 をそれぞれ t の関数として図示し、図から分かることについて考察せよ。

他の課題に白紙答案（またはそれに近いもの）がある場合は、おまけ課題は採点しない。

以上の課題を個人ごとにレポートにまとめ（「おまけ課題」は省いてもよい）、担当教員または事務室前のレポート箱に提出せよ。しめきりは1月22日（木）午後5時とする。

配点：[1][2] 各 20 点, [3][4] 各 30 点
おまけ課題 [5] = 30 点

*個人ごとに10月と同じ値を用いる。力学演習のホームページ <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/Mech/> を見よ。

[†]運動の様子をイメージしやすいように、 $y_P(t)$ のグラフと $y_Q(t)$ のグラフを上下に並べ、同じ時刻どうしを対応させて示すとよい。