

力学演習 II シミュレーション (1)

大信田丈志 (応用数理工学科) 2009-10-22

10月の課題

質量 m の質点と見なせる物体が、なめらかなレールに拘束されて運動している。レールは遠方で水平線 ($y = 0$) に漸近し、途中ではそれよりも低くなっている。レールの形は、鉛直上向きに y 軸をとると

$$\mathbf{r} = (x, y) = (Lq, -De^{-q^2}) \quad (\#1)$$

のようにパラメータ表示されるとしよう (ここで L および D は長さの次元をもつ正の定数)。また、重力加速度は $\mathbf{g} = (0, -g)$ と書ける。

[1] この物体の運動方程式をたて、余計な変数を消去して、 q についての常微分方程式の形に整理せよ。

[2] 変数 $u = dx/dt$ を導入し、さらに $u = p\sqrt{gL}$, $t = \tilde{t}\sqrt{L/g}$ と置く。これらの変数を用いて、運動方程式を

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ u \end{bmatrix} = \dots \quad \text{または} \quad \frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \dots$$

という 2 変数 1 階の常微分方程式に書き直せ。また、 t を用いた書き方と \tilde{t} を用いた書き方では何が違うのか説明せよ。

[3] 指定されたパラメータの値*に対し、初期条件をさまざまに変えて数値解を求めることのできるプログラムを作成せよ (再コンパイルしなくとも初期条件を変えられるように工夫する)。なお一般に q は微小とは限らない。有限の q に対する方程式を用いてプログラムを作ること。

このプログラムを用いて、適当な (適切な) 初期条件に対する解を求め、次の 2 つの方法でグラフ化せよ:

- 位置の時間変化を示すグラフ (横軸に時間を取り、縦軸に位置座標をとる)
- 位相平面 (横軸に位置座標を取り、縦軸に速度または運動量をとって解軌道を図示)

また、2 つのグラフの相互の対応関係が分かるように、対応する点には何らかの記号を書き込んでおくこと。

[4] 求めた数値解はどれくらい正しいか、理論的に検討せよ (以下の方法を両方とも試してみること):

- 微小振幅近似を用いて運動方程式を解き、その解をグラフ化して、数値解のグラフと重ねてみる。
- 運動方程式のエネルギー積分を求め、運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー U および 全エネルギー $K + U$ の値を数値解から時刻ごとに算出して、その値を時刻 t に対してプロットする。

[5] おまけ課題: 初期条件を $q|_{t=0} = 0$, $p|_{t=0} = p_0 > 0$ とし、この初期条件に対して物体が原点に戻ってくるまでの時間を $T/2$ とする (T が振動周期になるように $\frac{1}{2}$ をつけた)。今回作成した数値計算プログラムを用いて、 T と p_0 の関係を数値的に求め、図示せよ。また、可能な範囲で理論的な結果を求めて比較せよ。

他の課題に白紙答案 (またはそれに近いもの) がある場合は、おまけ課題は採点しない。

以上の課題を個人ごとにレポートにまとめ (「おまけ課題」は省いてもよい)、担当教員または事務室前のレポート箱に提出せよ。しめきりは 11月12日(木)午後1時 とする。

配点: [1][2] 各 20 点, [3][4] 各 30 点
おまけ課題 [5] = 30 点
グラフが全くないレポートは採点対象外

*個人ごとに異なる値を指定する。力学演習のホームページ <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/Mech/> を見よ。