

力学演習 II シミュレーション (3)

大信田丈志 (応用数理工学科) 2009-12-28

連成振動の例：弾性軸で連結された剛体振り子

固有振動数は同じだが異なる慣性モーメントをもつ剛体振り子をふたつ用意し、両者を弾性軸で連結する。弾性軸のトルクを N とすると、この系の運動方程式は

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -M_1 g \ell_1 \sin \theta_1 + N \quad (\#1a)$$

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -M_2 g \ell_2 \sin \theta_2 - N \quad \left(\frac{M_1 g \ell_1}{I_1} = \frac{M_2 g \ell_2}{I_2} = \omega_0^2 \right) \quad (\#1b)$$

と書ける。系に余計な初期ねじりが入っていないとすれば、弾性棒のねじり角は $\theta_2 - \theta_1$ であり、トルクは

$$N = k(\theta_2 - \theta_1) \quad (\#2)$$

という式で与えられる (理想的な弾性軸の場合)。係数 k はねじり剛性と呼ばれる。

振幅が微小であるなら、運動方程式 (#1) を線形化して解くことにより、解を

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} (A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \quad (0 < \omega_1 < \omega_2) \quad (\#3)$$

のような形で求めることができる。ここで A_1, A_2, B_1, B_2 は任意定数であり、 (u_1, v_1) および (u_2, v_2) はこの振動系の基準振動モードをあらわす固有ベクトルである。

式 (#3) は、 $Q_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t$, $Q_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t$ と置くと

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} Q_1 + \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} Q_2 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

とも書ける。この式は (θ_1, θ_2) を (Q_1, Q_2) であらわす形になっているが、逆に (Q_1, Q_2) を (θ_1, θ_2) であらわすことも可能である。それには、逆行列を用いて

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\#4)$$

とすればよい。

12月・1月の課題

[1] 方程式系 (#1)(#2) の数値解を $0 \leq t \leq t_{\max}$ の範囲で求められるような数値計算プログラムを作成せよ。ただし、次の条件を満たすこと:

- 変数の次元に注意を払って適切に扱う。たとえば、時間は秒単位 ($\tilde{t} = t/s$) で考えてもよいし無次元時間 ($\tilde{t} = \omega_0 t$) で考えてもよいが、どちらで考えるのか、方針を明確にすること。
- 初期条件や t_{\max} や 2 つの無次元パラメータを好きなように変えられる (たとえばキーボード入力できる) 設計にせよ。さらに、出力ファイルの冒頭部分を見れば入力内容が確認できるようにすること。
- 少なくとも 2 次精度の解法を用いること。

- 結果の検証のため、各時刻における力学的エネルギーの値を出力する機能を組み込むこと。
- 変数名と意味を一致させるなどして、バグの生じにくいプログラミングをおこなうこと。

[2] とりあえず $M_1gl_1 : M_2gl_2 : k = 1 : 1.3 : 0.2$ とする。上記 [1] のプログラムをそのまま用いて*以下の 2 つの場合の数値解を求め、微小振幅近似による解析解と比較せよ:

- 初速度は両方ともゼロで、 θ_1 をゼロにしたまま、 θ_2 に微小な初期値を設定。
- 第 1 モードの振動が生じるような適当な初期条件を与える†。

グラフとしては、それぞれ以下の 3 種類を示すこと:

- 横軸を時間、縦軸を θ_1 または θ_2 としたグラフ (数値解と解析解を重ねて図示)
- 横軸を時間とし、数値解から式 (#4) によって求めた Q_1 または Q_2 を縦軸とするグラフ (数値解のみでよいが、解析解から予想される結果と一致するかどうか確認)
- 位相空間 (今の場合は 4 次元) の解軌道を $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ 面に射影したもの (これも数値解のみでよい)

また t_{\max} については、少なくともそれぞれの振り子の周期の 10 倍以上の時間をとること。

[3] パラメータを上記 [2] と同じ値に設定し、ただし初期条件を変更して振幅を大きくした場合について考える。この場合の数値解を [1] と同じプログラムで求め、振幅を大きくするにつれて、微小振幅の場合と結果がどのように違ってくるか考察せよ。なお、どんなグラフを作ったら最も意味のある結果が示せるか、自分でよく考えること。

[4] 弾性軸が完全に理想的でなく、いくらか内部抵抗を含む場合を考える。この場合、式 (#2) の代わりに

$$N = \left(k + \gamma \frac{d}{dt} \right) (\theta_2 - \theta_1) \quad (\#5)$$

という式を用いることになる。

パラメータの大きさを $M_1gl_1 : M_2gl_2 : k : \gamma\omega_0 = 1 : 10 : 0.2 : \Gamma$ とし (ここで $0 \leq \Gamma \ll 1$)、また初期条件を $(\theta_1, \theta_2)|_{t=0} = (0, \pi/3)$, $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)|_{t=0} = (0, 0)$ としよう。 $\Gamma = 0$ の場合と $\Gamma = 0.1$ の場合の数値解を求めて比較し、また必要に応じて両者の中間的な Γ の値についても数値解を求めて、 Γ が 0 から少しずつ増大するにつれて結果がどのように変わるか考察せよ。特に、じゅうぶん長い時間が経過したあと、最終的にどのような状態が実現するのかに注意して考察すること。

注: Γ の影響がはっきり現れるまで長い時間がかかる場合もあるし、早まって最終状態と判断したものが実は最終状態ではなかったりすることもあるので、 t_{\max} をあまり短く設定しないこと。

[5] おまけ課題: 上記 [4] で $\Gamma = 0.1$ の場合について、さらに考察する。この力学系の解軌道を考えることにより、系が最終的な状態に漸近していく様子を明らかにせよ。ただし、いま考えている系では、解軌道は 4 次元の位相空間のなかに描かれるので、直接図示するのは難しいのだが、これを何とかして図示する方法を考えて、時間が経過するとともに解がどうなるか一目で分かるような図を作成せよ。

他の課題に白紙答案 (またはそれに近いもの) がある場合は、おまけ課題は採点しません。

これらの課題をレポートにまとめ、1月29日の午後5時までに事務室前のレポート箱に提出せよ。

配点: [1]-[4] 各 25 点
おまけ課題 [5] = 30 点

*プログラムが [1] に示されていないか、[1] のプログラムと [2] の内容が明らかに矛盾している場合は、[2] 以降は無効とします。

†他の人といっしょに勉強する場合、この値はなるべく個人ごとに異なる値を用いてください。全く同じ初期条件のレポートがあった場合には、自力で解いていないものと見なして没にするかもしれません。