流体の数学

鳥取大 (工) 応用数理工学科 大西研究室

数理工学演習 I/II (2000-05-22 版)

演習の内容について

このプリントは、学部 3 回生の科目である「数理工学演習 I/II」において、合計 4 週間の演習をおこなうことを念頭においている。第 1 週および第 2 週に第 **I** 部の演習をおこない、第 **II** 部の演習を第 3 週および第 4 週におこなう。

まず、演習が始まる前に、第 **I** 部の冒頭にある「流体の方程式を導くための準備」のなかの演習問題を予習しておいてほしい。第 1 週の演習では、これらの問題について小テストをおこなったあと、黒板で説明してもらう。そのあとの「『場』というもの」は 第 1 週のレポート課題である。

第 1 週の終了時に「流体力学の方程式」のなかの各課題の担当者を決めておき、第 2 週に結果を報告してもらうことにする。なお、課題はそれぞれにまとまった内容をもっているので、担当を決めるときに あまり細分しないほうが良い。場合によっては、課題報告をレポートとしてやり直してもらうこともありうる。そのほか、第 4 章「音波の方程式」が 第 2 週のレポート課題となる。

第 **II** 部も、第 **I** 部とほぼ同じように進める予定である。つまり、第 3 週に「ベクトル解析の復習」についての小テストおよび黒板での解説をおこない、そのあと「変数分離法」についてのレポートを課す。第 3 週終了時に決めた分担に従い、第 7 章「流体力学の方程式を解く」にある課題の結果を第 4 週に報告してもらう。最後の第 8 章はレポート課題である。

目 次

第 I 部　流体の方程式を導く **2**

1　流体の方程式を導くための準備 **2**
- 1.1　面積分と体積積分 2
- 1.2　Gaußの定理 3
- 1.3　添字記法 3
- 1.4　保存則とバランスの式 4

2　「場」というもの **5**

3　流体力学の方程式 **5**
- 3.1　流体における質量保存則 5
- 3.2　熱伝導方程式を導出する 6
- 3.3　熱伝導方程式を解いてみる 7
- 3.4　非粘性流体の運動方程式 8

4 音波の方程式 **9**

第 II 部 流体の運動を解析する **10**

5 ベクトル解析の復習 **10**
5.1 ベクトル場の微分に関する公式 10
5.2 渦の流れ 10

6 変数分離法 **11**

7 流体力学の方程式を解く **11**
7.1 渦度方程式 11
7.2 水の波 12
7.3 浅水波 12
7.4 粘性流体の方程式 13

8 粘性流体の運動: Poiseuille 流れ **14**
8.1 平面 Poiseuille 流 14
8.2 円管 Poiseuille 流 15

A Gaußの誤差関数 **16**

B ギリシャ文字 **16**

第 I 部
流体の方程式を導く

1 流体の方程式を導くための準備

1.1 面積分と体積積分

面積分または体積積分を用いて、次のものを求めよ。

(1) 領域 $V_1 = \{\ (x,y,z)\ |\ 0<x<L_1,\ 0<y<L_2,\ 0<z<L_3\ \}$ において、温度分布が

$$T = T_0 + T_0' z + \frac{1}{2} T_0'' z^2 \quad (\text{ただし } T_0,\ T_0',\ T_0'' \text{ は正の定数})$$

のようになっているとする。このとき、領域 V_1 のなかに存在する熱エネルギーの総量 Q を求めよ。ただし、簡単化のため、物質の密度 ρ および質量あたりの比熱 c は既知の定数であるものとする。

ヒント:
もし体積 V のなかの温度 T が一定ならば、熱エネルギー Q は

$$Q = CT = \rho c T V \qquad (C = [\text{熱容量}] = \rho c V)$$

として求められる。この式をどう応用するかがポイント (そんなに単純じゃないよ)。

(2) 領域 $V_2 = \{\ (x,y,z)\ |\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < z < h\ \}$ のなかに、

$$\rho = \rho_0\, e^{-(x^2+y^2)/a^2} \quad (\text{ただし } \rho_0,\, a \text{ は定数})$$

のような電荷密度分布が存在している。このとき、領域 V_2 のなかの電荷の総量 q_2 を求めよ。

(3) 電磁気学における **Gaußの法則**によれば、領域 V のなかに存在する電荷の量は、領域 V の 表面 S を貫いて内側から外側へ向かう電気力線の総量に等しい。
具体的に、領域 $V_3 = \{\ (x,y,z)\ |\ -3a < x < 3a,\ -2a < y < 2a,\ -a < z < a\ \}$ において電場 (電束密度場) $\mathbf{D}$ が

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (0,0,+\epsilon_0 E_0) & (z > 0 \text{ において}) \\ (0,0,-\epsilon_0 E_0) & (z < 0 \text{ において}) \end{cases}$$

のように与えられているとき、V_3 に含まれる電荷の総量 q_3 を求めよ。

(4) 同様に、領域 $V_4 = \{\ (x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2 < a^2\ \}$ において

$$\mathbf{D} = (Kx, Ky, Kz)$$

のような電束密度場が存在しているとき、領域 V_4 に含まれる電荷の総量 q_4 を求めよ。

1.2 Gaußの定理

ベクトル解析でいう Gaußの法則 (**Gaußの定理**) は、

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \int_{V\text{ の境界}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{1.1}$$

という恒等式である。電磁気学における "Gaußの法則" とは、関係はあるけれども概念的に別のものであるから[1]、混同してはいけない。

(1) 恒等式 (1.1) を、(いきなり一般的な V を扱うのは難しいので) V が微小領域の場合について証明せよ。つまり、領域 V を $V = \{\ (x,y,z)\ |\ x_0 < x < x_0+h_1,\ y_0 < y < y_0+h_2,\ z_0 < z < z_0+h_3\ \}$ とし、さらに h_1, h_2, h_3 は非常に小さいとして、式 (1.1) の右辺を計算すると左辺が得られることを示せ。(なお、一般の領域の場合については、領域 V を微小領域に細分化して証明すればよいが、ここでは省略する。)

(2) ベクトル場 $\mathbf{f}$ および 領域 V を 具体的に

$$\mathbf{f} = \left(1-z^2,\ x+y,\ 2z\right), \quad V = \left\{\ (x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2 < a^2\ \right\}$$

とした場合について、式 (1.1) の左辺と右辺をそれぞれ計算し、結果が一致することを確認せよ。

1.3 添字記法

ベクトル解析においては、

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \partial_j a_j$$

のように、同じことをあらわすのにも 場合に応じて さまざまな記法が用いられる。ここで 最後にでてきた

$$\partial_j a_j$$

[1] 文献 [1] に次のような言葉がある: "「公式」などと一口に言うが、数学に於ける公式は主に「恒等式」であり、物理学に於ける公式は、「方程式」である。..." (第 60 節「地球へ」より)

のような書き方を、このプリントでは添字記法とよぶことにする。本当は

$$\sum_{j=x,y,z} \partial_j a_j$$

のように書くべきなのであるが、添字記法では ふつう $\sum$ を省略し、そのかわり「添字が 2 つ重複していたら $\sum$ を補って考える」という約束になっている。

(1) 式 $\mathbf{x} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ を 添字記法で書き直せ。
(2) 添字記法を用いて次の式を示せ:

$$\nabla\cdot(f\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla f + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \tag{1.2}$$

1.4 保存則とバランスの式

何らかの量 (物質・エネルギー・電荷など) が空間に分布しており、領域 V におけるその総量 Q を考えることができるものとしよう。このとき、この分布量の時間変化は、一般的に

$$\frac{\partial}{\partial t}[\text{分布密度}] + \mathrm{div}\,[\text{流束項}] = [\text{生成項}] \tag{1.3}$$

という形の式に従う。式 (1.3) をバランスの式あるいは広義の保存則という[2]。

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ は何を意味するか? 物理的な意味を説明し、また、極限を用いた数学的な定義を示せ。
(2) バランスの式 (1.3) の具体例として、Q がエネルギーをあらわす場合を考えてみよう。ただし、話を簡単にするために、比較的遅い流れに考察を限定する。すると、Q としては 運動エネルギーを無視して熱エネルギーだけを考えればよく[3]、また 流体の圧縮や粘性摩擦による発熱も無視できるから、熱量 Q に対して狭義の保存則が成り立つ (生成項がゼロである) と考えられる。このとき、熱エネルギーの分布の時間変化は、次のような形の偏微分方程式で記述されるという:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0 \tag{1.4}$$

方程式 (1.4) の導出過程および記号の意味について、下記の考え方に従い、順を追って説明せよ。

- 領域 V を適当に空間に固定し、その中に存在する熱量を Q とすると、Q は体積積分を用いて $Q = \displaystyle\int_V \boxed{}\, dV$ のように書ける。
- 熱エネルギーの分布の変化を考察するため、Q の時間変化を考える。これは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q &= +\Gamma - \Phi \qquad (1.5)\\ \Gamma &= [\text{領域 } V \text{ の内部での熱の生成量}]\\ \Phi &= [\text{境界を通して } V \text{ の外へ出ていく熱量}] \end{aligned}$$

のような式であらわされるはずである。ただし、ここで考えているような状況では $\Gamma = 0$ である。

- 問題は Φ を数学的にどうあらわしたらよいかということで、それには、熱の移動を数学的にあらわす方法を考えておく必要がある。ちょっと考えると

$$J = [\text{単位時間・単位面積あたりの熱の移動量}]$$

[2] 生成項がゼロの場合が狭義の保存則である。
[3] 逆に、気体力学で考えるような速い流れでは、熱だけを切り離して考えることにはあまり意味がなく、内部エネルギーと運動エネルギーを一緒にしてエネルギー方程式を考える必要がある。エネルギー方程式の具体的な形については参考文献 [5] の p.59 を見よ。

とすれば良いような気がするが、これでは不十分だ。なぜなら、移動の方向が示されていないからである。そこで、J をベクトルにして $\mathbf{J}$ とし、これにより Φ をあらわす方法を考えよう。

- しかし、いきなり領域 V の境界面全体について Φ を求めるのは難しいので、境界面を微小な面に切り刻んで考えることにする。微小な面の面積を ΔS, 表向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として、この微小面をとおる単位時間あたりの熱量を $\Delta\Phi$ としよう (裏から表への移動を正とする)。このとき、$\Delta\Phi$ を $\mathbf{J}$ (と ΔS と $\mathbf{n}$) であらわすことができる。これをもとに、Φ を $\mathbf{J}$ であらわす式を導く。
- 以上の結果を式 (1.5) に代入し、これを

$$\int_V \Big[\qquad\qquad\qquad \Big] dV = 0 \tag{1.6}$$

のような体積積分のみの形に書き直す。

- 領域 V は適当 (いいかげん) に取ったにもかかわらず式 (1.6) が成り立つことを考えて、T の時間変化を記述する偏微分方程式を導く。

(3) 流体の運動方程式を導くには、運動量 Π の分布を考える必要がある。しかし、いきなり空間的な分布 (無限自由度の系) を考えるのは難しいので、準備として質点系 (有限自由度の系) を考えることにしたい。まずは、質点 A と質点 B が力を及ぼしあう場合について、Newton の運動方程式から

$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$$
$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{B}} = \cdots$$

のような式を導け。また、この式が保存則をあらわしていることを説明せよ。

(4) 機関車を含めて 3 両連結で走る列車の運動方程式を、上記のような形で記せ (各車両を質点とみなす)。このとき、狭い意味での運動量保存が成り立たないことを、理由とともに説明せよ。

2 「場」というもの

いままで、温度分布・電荷分布などという書き方をしてきたが、数学的には、"空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数" あるいは "空間座標 $\mathbf{r}$ と 時刻 t の関数" のことを場 (field) と称するので、たとえば温度分布は温度場という場として考えられる。別の例をあげると、磁力線が空間に分布している様子は磁場あるいは磁束密度場としてとらえられる。流体力学では、空間の各点ごとの速度を示す速度場が重要な概念である。

(1) 天気予報において用いられる場の例を挙げよ。
(2) 場にはベクトル場・スカラー場などがあるが、これらの違いは何か?
(3) 場を図示する方法をいくつか挙げよ。できれば実例を示して説明すると良い。

3 流体力学の方程式

今までの予備知識をもとに、流体における質量保存則 (連続の式)、および広義の運動量保存則 (運動方程式) をあらわす式を導く。また、関連するテーマとして、熱伝導方程式についても考察する。

3.1 流体における質量保存則

(1) ある時刻 $t = t_0$ における流れ場が次のように与えられているとする:

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = (A\sin x\,\cos y,\ B\cos x\,\sin y,\ 0) \qquad [A, B \text{ は定数}] \tag{3.1}$$

ここで「場」という言葉が示すように $\mathbf{u}$ は (x, y, z) の関数であり、場所ごとに異なる速度を表している。さて、『流体が非圧縮であるとすれば、式 (3.1) のなかの定数 A, B は ある関係式を満たすはずだ』という。この関係式を、次のような考え方にしたがって求めよ。

- まず、
$$V = \{\, (x, y, z) \mid x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ z_1 < z < z_2 \,\}$$
のような直方体状の領域 V を考える。領域 V は流体中に完全に浸かっているものとする。また、$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ は微小であるとは限らない。
この直方体の表面を S とし、S を構成する 6 つの面を S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, ... のように名付ける。
- 面 S_{x1} および面 S_{x2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_x M$ を求める。なお、流体の密度はどこでも一定である $(\rho = \rho_0 = \text{const.})$ と仮定する。
- 同じく、面 S_{y1} および面 S_{y2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_y M$ を求める。
- 同じく、面 S_{z1} および面 S_{z2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_z M$ を求める。
- 領域 V に含まれる全質量は $M = \int_V \rho\, dV$ である。もし流体が圧縮性ならば M は
$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_x M + \Delta_y M + \Delta_z M}{\Delta t}$$
に従って時間変化するはずであるが、あいにく、今の場合、流体は 非圧縮 である。このことから、A と B のあいだに成り立つべき関係式が得られる。

(2) 上記の関係式を、以下のような方法を用いて求めてみよ。確かに同じ結果が得られることを確認すること。また、計算にかかる手間を比較してみよ。

- まず、一般論として、流体の質量密度を ρ とし、式 (1.3) の形で質量保存則を書きあらわす。
- もしも流体が非圧縮かつ一様ならば ρ は定数である (時間的にも空間的にも一定)。このことから、速度場 $\mathbf{u}$ が
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{3.2}$$
を満たすことを示す。
- ここで具体的に式 (3.1) と式 (3.2) を考え合わせることにより、A と B のあいだに成り立つべき関係式を求める。

(3) 連続の式とは どのような式で 何を意味しているのか、説明せよ。

(4) 流体の密度 ρ が、時間 t と空間座標 x の関数として
$$\rho = a + b\cos(kx - \omega t) \tag{3.3}$$
のように与えられている。このとき、速度場 $\mathbf{u}$ について 次のようなことが分かっているものとして、$\mathbf{u}$ を求めよ。また 結果を検算せよ。

- 速度場は $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ のようになっている。
- 壁が $x = 0$ の位置に存在するので $u|_{x=0} = 0$ である。

3.2 熱伝導方程式を導出する

いきなり流体の運動方程式を考えるのは難しいので、より易しい問題として、熱の移動を記述する方程式を考えることにする。

(1) 熱の移動には「伝導」「対流」「放射」の 3 つがある。それぞれについて、いくつか具体例を挙げて説明せよ。ただし、自分で体験したことのある例に限る (本で読んだだけの話ではだめ)。

(2) 次の手順に従い、熱伝導方程式

$$\frac{D}{Dt}T = \kappa \triangle T \tag{3.4}$$

を導出せよ。なお、左辺の D/Dt は物質微分または**Lagrange** 微分といって、『流体の立場から見た時間微分』である[4]。

- 熱量保存則を 式 (1.3) の形で書く。ただし、熱の移動は とりあえず **J** と置いておき、その内容はあとから考えることにする。また、熱量が保存するような状況を考えるので、熱の生成項、すなわち式 (1.5) における Γ の項は無視できるものとする。
- 熱の移動のうち、伝導による熱の流れは温度勾配 (距離あたりの温度差) に比例することが知られている。つまり、熱伝導による熱の移動を $\mathbf{q}$ と書くと、$\mathbf{q}$ は

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T \tag{3.5}$$

のように表される (**Fourier** の熱伝導の法則)。ここで λ は熱伝導率で、物質の種類によって決まる定数であると考えてよい[5]。

- 熱などが "流れに乗って" 運ばれることを、移流 (あるいは対流) という。流体の流速ベクトル場を $\mathbf{u}$ とし、これによる熱の移流を $\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$ と書くとき、

$$\mathbf{J}_{\mathrm{c}} = \rho c T \mathbf{u}$$

であることを示す。

ヒント:
時間 Δt のあいだに面 ΔS を通過する流体の体積をまず求め、これを熱量に換算する。

- 話を単純化するため、熱の移動のうち 放射による部分は無視できるものと見なす。
- 以上の結果を総合すると、流体中の熱伝導方程式が

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\mathbf{u}) = \kappa \triangle T \tag{3.6}$$

の形で得られる (ただし ρ, c, λ はいずれも定数であるとする)。あとは、非圧縮流体に関する連続の式 (3.2) を用いて方程式 (3.6) を書き直すと、方程式 (3.4) が得られる。

(3) 流れがない場合 (特に固体中の場合) の熱伝導方程式はどうなるか?

(4) 各物理量の単位を SI 単位系であらわすとき、κ の単位を求めよ。

3.3 熱伝導方程式を解いてみる

せっかく熱伝導方程式を導いたので、これを用いて簡単な応用問題を解いてみよう。話をなるべく簡単にするため、1 次元の問題を考え、また流れは存在しないものとして、熱伝導方程式 (3.4) を

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T \tag{3.7}$$

のように単純化して考える。問題設定は次のようにしよう:

[4] 通常の時間微分 $\partial/\partial t$ が (x, y, z, t) を独立変数としたときの偏微分であるのに対し、物質微分 $D/Dt \equiv (\partial/\partial t)_{a_x, a_y, a_z}$ は (a_x, a_y, a_z, t) を独立変数としたときの t による偏微分である。ここで (a_x, a_y, a_z) は物質座標を示す。

[5] 一般には λ は温度の関数であるが、温度の変化する幅が小さければ λ は定数と見なして良い。

長い鉄の棒があって $0 < x < +\infty$ の範囲を占めている。時刻 $t = 0$ までは この棒の温度は一様であったので、$T|_{t=0} = T_0 = \text{const.}$ であった。しかし、時刻 $t = 0$ において、棒の端を 温度 $T_{\rm W}(= T_0 + T_1)$ の壁に接触させたため、壁から熱が伝わりはじめた。この壁にはヒーターか何かが仕込んであって、そのために壁の温度は常に $T_{\rm W}$ に保たれている。つまり、棒の一端 $(x = 0)$ の温度は 常に $T_{\rm W}$ であり、ここから x 軸にそって熱が伝わっていくことになる。このとき、この鉄棒における温度分布の様子やその時間変化を知りたい。

この問題を、1 次元熱伝導方程式 (3.7) を用いて考察しよう。

(1) まず、次の方法にしたがって 方程式 (3.7) の初期値・境界値問題の解を求めよ。

- 解の形を $T = T_0 + T_1 f(\eta), \quad \eta = \text{const.} \times \kappa^\alpha x^\beta t^\gamma$ のように仮定する。この場合 η は 無次元量 でなければならない。この条件をみたすように α, β, γ の値を定める。
  (任意定数が残る場合は、$\beta = 1$ となるように決めると あとの計算が楽になる。)
- 連鎖則を用いて $\partial/\partial x$ および $\partial/\partial t$ を $d/d\eta$ であらわす。
- 熱伝導方程式を η を用いた形に書き直す。これに合わせて境界条件も書き直す。
- この方程式を解いて f を求める。
- 最終的に、温度場 T を 時間 t と空間座標 x の関数として求める。

(2) 次に、温度場の空間変化および時間変化の様子を示すため、結果を図示せよ。

- 時刻 $t = t_0$ (> 0) での温度分布を図に描く。
- 同様に、$t = t_1 = 4t_0$ での温度分布を図に描き、時刻 $t = 0$ での分布図と比較する。

(3) 壁から $x = x_{\rm H}$ までの領域は $T > T_{\rm W} - T_1/2$ となるような高温領域である。時間の経過とともに高温領域がしだいに広がっていく様子を図示し、説明せよ。

参考: 補遺 A にある「Gaußの誤差関数」を利用するとよい。

3.4 非粘性流体の運動方程式

流体の運動方程式を導くために、『x 方向の運動量』の広義の保存則を考え、バランスの式 (1.3) と同様の形に書き表す。ここでは、話を簡単にするため、非粘性流体に話を限ることにするが、粘性流体の場合も、応力の考察が複雑になるだけで、考え方は同じである。

(1) 空間に固定された領域 V を考え、この領域の内部の流体[6]がもつ x 方向の運動量を Π_x とする。流体の速度ベクトル場を $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とし、流体の密度を ρ として、Π_x をこれらの量であらわせ。

(2) 運動量 Π_x の時間変化は

$$\frac{d}{dt}\Pi_x = -[\text{流れによる流出}] - [\text{応力による流出}] + [\text{外力による増加}] \tag{3.8}$$

のような式に従う。以下のような考察により、式 (3.8) の右辺を具体的に書き下せ。

- 体積あたりの x 方向の外力を f_x とする (これは (x, y, z) に依存するかもしれない)。
- 境界面をとおした運動量の出入りには、
  (a) 移流 (=流れに乗ってはこばれること) によるもの

[6] 『領域 V を占める流体』ではなく『領域 V の内部』にある運動量を考えるのだということに注意しよう。前者 (流体) は移動するが中身は変わらないのに対し、後者 (領域) は移動せず中身が入れ替わる。

(b) 応力 (=面をとおしてはたらく力) によるもの

がある。まず移流のほうを考えよう。微小面 ΔS をとおして移流によって出ていく運動量 (x 成分、単位時間あたり) を

$$\Delta\Phi_x = \boxed{} \cdot \mathbf{n}\Delta S$$

の形であらわし、これを用いて、領域 V の境界全体からの移流による流出量 Φ_x を求める。

- 領域 V の境界面から応力という形で出ていく運動量 (の x 成分、単位時間あたり) を Ψ_x とする。ここでは、話を簡単にするため、流体は非粘性流体であるものと仮定しよう。すると、応力として圧力だけを考えれば良いことになる[7] 圧力には決まった方向性はなく、任意の面に垂直に働く性質がある (**Pascal** の原理) ので、面積あたりの力は $p\mathbf{n}$ であり[8]、その x 成分は pn_x である。これより、Ψ_x を、p を用いた表面積分の形であらわすことができる。

(3) Gaußの発散定理などを利用して 式 (3.8) を変形し、(1.6) のような体積積分のみの形に直せ。ここで V の取り方は任意であり、どのように V をとっても上で得られた式が成り立つということから、非粘性流体の運動方程式 (**Euler** 方程式) の x 成分を導け。

(4) 同様に、y 成分、z 成分に関する式を示せ。

(5) 上記の方法で導いた運動方程式を適当に書き直すと

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{3.9}$$

のようになることを示せ。

ヒント:
まず、運動方程式を添字記法で書き、次に連続の式を利用して運動方程式を変形する。

4 音波の方程式

微小な圧力変動が気体中を伝わる現象は、音波として知られている。これについて、流体の方程式をもとに解析してみよう。

(1) 次の方針により、音波が波動方程式に従うことを示せ。

- 気体の運動は、連続の式、Euler 方程式、および断熱圧縮の式

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

に従うものとする。ここで p_0 および ρ_0 は定数であり、ここでは標準状態における空気の圧力および密度に等しいものとする。また γ は比熱比で、空気の場合には約 1.4 である。

- 微小な圧力変動と、それに伴う微小な密度変動・速度変動を考え、

$$p = p_0 + \epsilon p_1, \qquad \rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + O(\epsilon^2), \qquad u = \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)$$

とする。これを各方程式に代入して ϵ のべきで展開し、ϵ は小さいとして $O(\epsilon^2)$ の項を無視する。

- 変数を消去し、方程式の数を減らして 1 本の方程式にまとめる。

(2) 上記の方針によって求めた音波の方程式に基づき、標準状態における空気の圧力および密度を用いて音速を計算せよ。妥当な値が得られるだろうか?

[7] 粘性流体では、圧力のほかに粘性応力を考える必要がある。

[8] 面の裏側の流体が表側に与える運動量 (=及ぼす力) の向きは $\mathbf{n}$ と同じ向きなので、符号は正でよい。

第 II 部
流体の運動を解析する

5　ベクトル解析の復習

5.1　ベクトル場の微分に関する公式

(1) ベクトル場 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して $\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ を計算せよ。結果はなるべく整理した形で示すこと。
(2) スカラー場 f に対しては

$$f\,\mathrm{grad}\,f=\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left(f^2\right)$$

が成り立つが、ベクトル場 $\mathbf{f}$ の場合は $\mathbf{f}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{f}$ と $\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{f}^2)$ が等しいとは限らないことを説明せよ。
(3) ベクトル場 $\mathbf{f}$ に対し、

$$\mathbf{f}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{f}-\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left(\mathbf{f}^2\right)$$

は $\mathbf{f}$ と $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ の外積を用いてあらわせることを示せ。

5.2　渦の流れ

典型的な渦流れは、次のような速度分布を示す (図 1 を参照):

$$\mathbf{u}=(u,v,w)=\begin{cases}(-by,bx,0) & (\sqrt{x^2+y^2}\le a)\\ \left(-\dfrac{ba^2y}{x^2+y^2},\ \dfrac{ba^2x}{x^2+y^2},\ 0\right) & (\sqrt{x^2+y^2}>a)\end{cases}\tag{5.1}$$

ここで a,b は定数である。

(1) 式 (5.1) のような流れ場において、渦度 ω の分布はどのようになっているか?
- まず $\omega=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ を計算する。
- 次に、渦度場 ω を図示する。

(2) 回転流れを特徴づける量として循環という量があり、これは閉曲線にそって

$$\Gamma=\int\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$$

を計算することにより求められる。具体例として、次の閉曲線に関する循環 Γ を求めよ。
- (x,y)-平面上の、原点を中心とする半径 c の円周 (注意: 場合分けが必要!)
- $(0,0,0)\to(a,0,0)\to(0,a,0)\to(0,0,0)$ のような三角形
- $(0,0,0)\to(a,0,0)\to(a,a,0)\to(0,a,0)\to(0,0,0)$ のような四角形

(3) ベクトル解析における Stokes の定理を用いて 渦度から循環を求めることができる。この方法を用いて 前問の 3 つの場合における循環を計算し、結果が一致することを確認せよ。

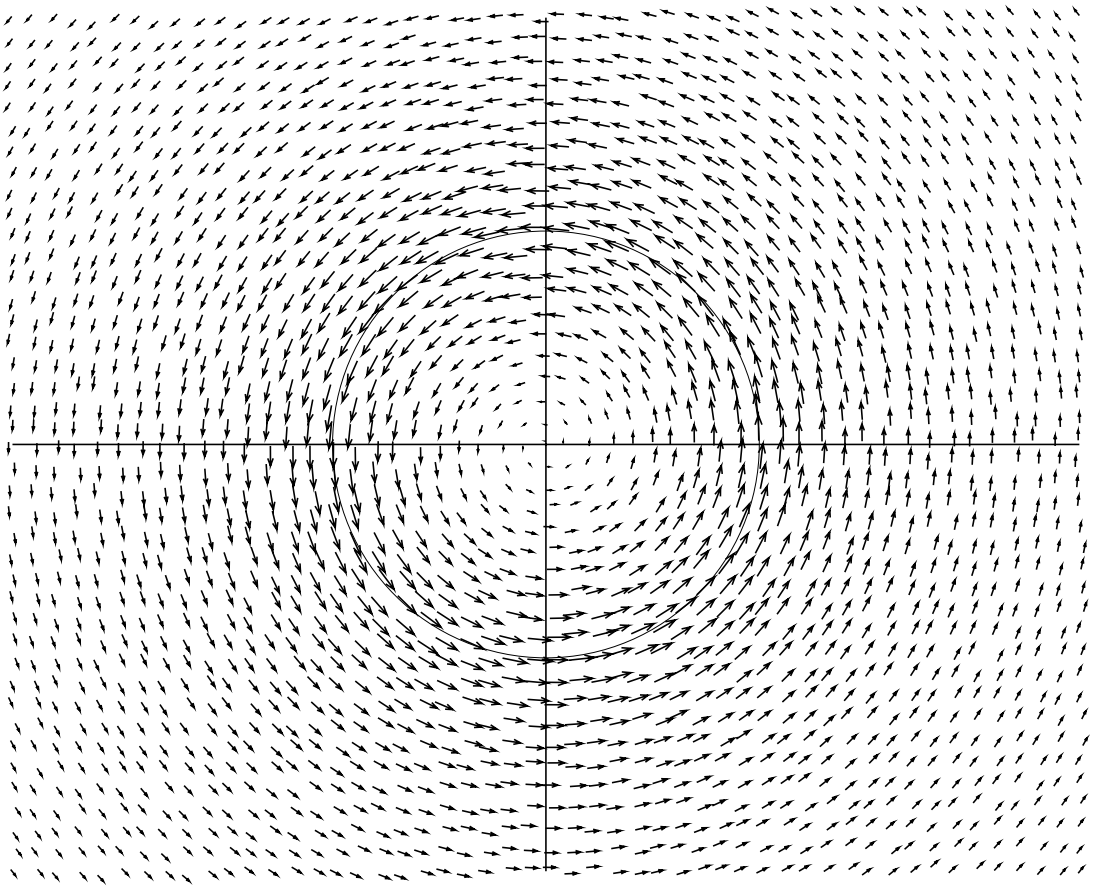

図 1: 渦による速度場 (5.1) の様子

6 変数分離法

偏微分方程式を解くための常套手段である変数分離法について復習しておく。

(1) 1 次元の音波を記述する方程式

$$\partial_t^2 p - a^2 \partial_x^2 p = 0$$

の解を、変数分離法により求めよ。なお、境界条件は自分で適当に設定すること (無限領域でも有限領域でも どちらでもいいから、自分の好きなほうを採用せよ)。

(2) 1 次元の熱伝導方程式 (3.7) において、$T = T_0 + \theta$ (ここで $T_0 = \text{const.}$) と置き、境界条件を $\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\ell} = 0$ とする。このとき、変数分離法により一般解を求めよ。

7 流体力学の方程式を解く

7.1 渦度方程式

流体の粘性および圧縮性を無視し、流れは **Euler** 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{7.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = - \operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{7.2}$$

に従うものとしよう。ただし $\rho = \text{const.},\ \mathbf{f} = (0, 0, -\rho g)$ である。

(1) 下記の方針に従い、Euler 方程式を式変形して渦度方程式を導け。

- 渦度 $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ を用いると、Euler 方程式 (7.2) は次のように書き直せる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \rho^{-1} \operatorname{grad} p - \rho^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{u} \times \omega \tag{7.3}$$

- 方程式 (7.3) から渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{7.4}$$

を導出する。

(2) 渦度方程式 (7.4) の一般解を求めるのは困難であるが、それでもいくつかの解が容易に求められる。特に

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi \tag{7.5}$$

のような流れでは $\omega = 0$ (非回転流れ) であり、したがって式 (7.5) は渦度方程式 (7.4) の解のひとつであることを示せ (もちろん一般解ではない)。なお、Φ を 流れポテンシャルと称する。

7.2 水の波

非回転流れ ($\omega = 0$) は流れポテンシャル Φ を用いて式 (7.5) のように表すことができる。水の波(水面重力波) に伴って生じる流れは非回転流れと見なせるから、流れポテンシャルを用いて簡単な考察をしてみよう。

(1) 非圧縮という条件から、Φ の満たすべき微分方程式を求めよ。
(2) 水底を $z = -h_0$, 水面を $z = 0$ 付近とする。流れは (x, z) 面のなかでのみ生じると考え、速度ベクトルを $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ とする (y 成分はゼロ)。このとき、$\Phi = F(x)G(z)$ と置くことによって Φ の方程式を 1 変数の微分方程式 (常微分方程式) に分離せよ。
(3) 波長を λ とし、さらに水底での境界条件を与えることにより、解 Φ を求めよ[9]。また速度場を求め、その特徴を論じよ。特に、水面での速度と水底での速度の違いを、$\lambda \gg h_0$ (浅水波) および $\lambda \ll h_0$ (深水波) という両極端の場合について考察すること。

- 水面の水だけが動き、水底の水は静止しているのは どちらの場合か?
- 水面の水の動きに連動して水底の水も一緒に根こそぎ動くのは、どちらの場合か?

7.3 浅水波

波長 λ に比べて 水深 h_0 が比較的浅い場合を考えよう。このような場合の水の波を浅水波と称する。前節の最後で考察したように、浅水波では水面から水底まで水があたかも一体となって動くかのように考えても良い。したがって、次のような近似をして良いので、解析が簡単になる:

- 速度 u は z にはよらず、x と t だけの関数だと見なしてよい (もう少し正確に言うと、$|\partial_z u| \ll |\partial_x u|$ なので $\partial_z u = 0$ と近似できる)。
- 垂直方向の速度 w は小さい (u に比べて無視できる)。

このとき、波の伝わりかたについて もう少しくわしく調べてみよう。

[9] さらに解の時間発展を考察するには表面での境界条件が必要だが、一般的な場合を考察するのは難しいので省略し、浅水波の場合について次節で紹介するにとどめる。

(1) 水があるのは、z 方向に関して言えば水底 ($z = -h_0 = \text{const.}$) から水面 ($z = \eta$) までである。また、計算の便宜上、$y = \pm b/2$ に側壁があるとしよう。このとき、$x_1 < x < x_2$ の範囲にある水の量 M は

$$M = \rho b \int_{x_1}^{x_2} (h_0 + \eta)\, dx \simeq \rho b h \Delta x \tag{7.6}$$

であることを示せ (ただし $h_0 + \eta = h, \quad x_2 - x_1 = \Delta x$ とおいた)。さらに、水量 M の時間変化を考慮することにより、浅水波における "質量保存の式"

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \tag{7.7}$$

を導け[10]。

(2) Euler 方程式 (7.2) の z 成分を書き出し、浅水波近似を考慮して方程式を簡単化せよ。さらに、いくつかの物理的条件を考慮すると、圧力 p が

$$p = p_0 + \rho g(\eta - z) = p_0 + \rho g(h - h_0 - z) \tag{7.8}$$

のように求められることを説明せよ。

(3) Euler 方程式の x 成分を抜きだし、これに浅水波近似および式 (7.7), (7.8) を組み合わせることにより、次のような方程式が得られることを示せ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\boxed{} = 0 \tag{7.9}$$

(4) 方程式 (7.7) と (7.9) を組み合わせたものが、浅水波の発展を記述する方程式である。簡単な例題として

$$h = h_0 + \epsilon \hat{\eta} e^{ikx - i\omega t}, \quad u = \epsilon \hat{v} e^{ikx - i\omega t}; \qquad |\epsilon| \ll 1 \tag{7.10}$$

のような 波数 k の波の運動について考察してみよ。たとえば 波の速度はどのようになるか?

- ここで ω は角振動数をあらわす (渦度ではない)。
- 上記の式では、波動をあらわすのに複素数表示を用いている。複素数表示に慣れていない人は

$$h = h_0 + \epsilon\, |\hat{\eta}| \cos(kx - \omega t + \phi_1)$$

のように 実数表示に直して考えても良い。

(5) もうひとつ、簡単な場合として、津波あるいは衝撃波に対応する場合について考えてみる。状況は次のようになっているとする:

- 衝撃波が、右側の静止した水域 ($u = 0, \quad h = h_1$) に向かって速度 c で進んでいる。
- 衝撃波の左側の水域では $u = u_2 \neq 0, \quad h = h_2 > h_1$ である。

さて、右側および左側での水面の高さ (h_1, h_2) が与えられているとき、c を求めることができるか?
(ヒント: 衝撃波とともに速度 c で進む観測者を考えると便利)

7.4 粘性流体の方程式

流体運動において粘性が完全に無視できるのは例外的な場合であって、ふつうは粘性が無視できない。したがって、粘性を考慮した流体の運動方程式が必要になるが、そのような方程式を導くには、式 (3.8) において応力の項だけ直せばよい。ふつうの流体[11]では 粘性応力は $\partial_x u, \partial_y u, \text{etc.}$(速度勾配) の線形結合に比例する。さらに対称性の考察から粘性応力の形が決定され、**Navier-Stokes** 方程式が導かれる。

[10] 式 (7.7) は 1 次元での圧縮性流体に対する連続の式に似ている。
[11] 水や空気や水飴など、低分子より成る流体を指す。逆に言えば、血液や澱粉糊やマヨネーズは対象外である。

(1) 圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式はかなり複雑だが、非圧縮流体の場合には、Navier-Stokes 方程式は

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{7.11}$$

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho}\mathbf{f} + \boxed{} \tag{7.12}$$

という 比較的 簡単な形になることを説明せよ。また、方程式 (7.12) を成分表示で書きなおせ。

(2) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (7.12) から圧力 p を消去し、渦度拡散方程式を導け。ただし、簡単化のために $\mathbf{f} = \text{const.}$ とする。

(3) 特に簡単な場合として、$y = 0$ および $y = b\ (> 0)$ にある 2 枚の平面壁にはさまれた狭い流路を x 方向にまっすぐ流れる定常流 (平面 **Poiseuille** 流) を考えよう。このとき、渦度拡散方程式は

$$\partial_y^2 \omega = 0 \tag{7.13}$$

のように簡単化されることを示せ。

ヒント:
まず連続の式から $\partial_x u = 0$ を示す。

(4) 簡単化された渦度方程式 (7.13) の解を求め、これと

$$\text{壁面上で } \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7.14}$$

という条件 (粘着条件) から 速度場 $\mathbf{u}$ を求めよ。

8 粘性流体の運動: Poiseuille 流れ

非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解くことは、一般には非常に難しいが、それでも手計算で解ける例がいくつか知られている。そのような、手計算で求められる解のなかでも最も有名な例として、静止した壁をもつ狭い流路を流体がまっすぐに流れる場合 (**Poiseuille** 流) をあらわす解を求めてみよう。

8.1 平面 Poiseuille 流

流体は $y = 0$ および $y = b\ (> 0)$ にある 2 枚の壁にはさまれた水路を x 方向に流れているとしよう。外力はゼロであり、流れは定常である。壁の端のことは考えない。また z 方向のことも考えない。

(1) 水路の様子を図に描け。

(2) 次のような方針に従って方程式を簡単化し、解を求めよ。

- 流れは常に x 方向であるから、$\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ とおく。このとき、連続の式から重要な条件が得られる。
- 運動方程式 (7.12) を成分別に書きくだし、ゼロとなる項を指摘して式を簡略化する。
- 偏微分方程式のままでは解けないので常微分方程式に直す。今の場合、$-\partial_x p = \lambda$ とおくと、λ を分離定数とする "変数分離" の形になる。(確かに λ が定数になることを示せ!)
- 分離して得られた常微分方程式を解いて解を求め、速度 $\mathbf{u}$ を 圧力 p であらわす。なお、境界条件として粘着条件 (7.14) を課す。

(3) 渦度 $\omega = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ を求めよ[12]。結果を簡単な図に描いて考察せよ。式 (7.13) の結果と比較してみると良い。

[12] 渦度という名前はしばしば誤解をまねくが、ω は渦というより むしろ流体要素の回転 (自転) を示すものである。

(4) 具体例で考えてみよう。岩のあいだに 1mm のすきまがあり、そこを水 (密度 1 t/m^3, 動粘性率 10^{-6}m^2/s) が流れている。岩のこちら側では圧力は 1 気圧 (=1000hPa) であり、岩のすきまを 1 km ほどさかのぼったところでは 1.2 気圧の圧力がかかっている。このとき、すきまの中央 ($y = b/2$) での流速を求めよ。(ヒント: まず圧力勾配を求める。単位は MKSA 単位系に統一する。)

8.2 円管 Poiseuille 流

実際の応用で重要な例として、円管の場合を考える。このためには座標を円筒座標に直しておくほうが良い。

(1) ふつうの座標 (x, y, z)—**Descartes** 座標—と 円筒座標 (r, θ, ζ) のあいだの関係式が

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \zeta) \tag{8.1}$$

であるとして、$\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ を $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ で表せ。(注意: 演算子を含む計算では順番を勝手に変えてはいけない。$f\partial_x^2$ と $\partial_x f\partial_x$ は異なる!)

(2) 加減法 (中学校で習った) を用いて、上記の関係式の逆を求めよ ($\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ を $\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ で表す)。

(3) 細い管の流れ[13]では流れは常に軸に平行だとして良い。そこで $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ は軸方向の単位ベクトル) とし、また 流れは定常かつ軸対称だとする。さらに、外力 $\mathbf{f}$ はゼロだとしよう。このような条件のもとで、Navier-Stokes 方程式 (7.11–7.12) を円筒座標に書き直せ。(明らかにゼロになるような項は省略すること。)

(4) 解くべき方程式を 2 つの常微分方程式に分離し、さらにこれを解いて速度 u を求めよ。ただし壁面 ($r = a$) では粘着条件を課す。

(5) 管の断面を通る単位時間あたりの体積流量 Q を求めよ。他の条件を一定にして a を変えたとき Q はどのように変化するか? (これが **Hagen-Poiseuille** の法則[14]である。)

(6) 内径 $2a = 0.4$mm、長さ 15cm の毛細管に水をとおす。3 分で 100 mℓ の水をとおすには、どれだけの圧力をかける必要があるか 計算せよ。さらに、この圧力を水深に換算するとどれくらいになるか求めよ。(自分の経験と一致しているか?)

参考文献

[1] 吉田 武: 「ケプラー・天空の旋律」 (共立出版 1999)

[2] Feynman, Leighton & Sands: 「ファインマン物理学 III 電磁気学」 (岩波書店)

[3] Feynman, Leighton & Sands: 「ファインマン物理学 IV 電磁波と物性」 (岩波書店)

[4] 巽 友正: 「連続体の力学」 岩波基礎物理学シリーズ 2 (岩波書店 1995)

[5] 巽 友正: 「流体力学」 新物理学シリーズ 21 (培風館 1982)

[6] 今井 功: 「流体力学 (前編)」 物理学選書 14 (裳華房 1973)

[7] 宮原 将平: 「フックの法則」 物理学 One Point 7 (共立出版 1980)

[8] 青野 修: 「次元と次元解析」 物理学 One Point 16 (共立出版 1982)

[9] グランスドルフ, プリゴジン: 「構造・安定性・ゆらぎ — その熱力学的理論」 (みすず書房 1977); 第 1 章 保存則と釣合いの式

[13] 太い管では以下の条件が成り立たない。どれくらい細ければよいかは流速と粘性に依存する。

[14] 土木学者 Hagen と医学者 Poiseuille は、実験によってそれぞれ独立にこの法則を発見した。

[10] Donald A. McQuarrie: *"Statistical Mechanics"* (HarperCollins, 1976);
Chapter 17, Continuum Mechanics

大学で物理学を学ぶ以上は、天才 Feynman の講義録を一度は必ず読むべきである。このプリントの主題である「場」という考え方は、電磁気学の講義と並行する形で、文献 [2] の第 2・3・4・12 章で説明されている。

流体力学の参考書としては [4] が手頃。応力テンソルに関して第 2 章にくわしい説明がある。なお同じ著者の [5] は 大学院で流体をやるならぜひ買っておきたい。それから [7] は弾性体の本だが流体にも役立つ。わずか 1000 円程度で手軽に買えるし楽に読めるので、応力とは何か知りたいという人は読んでみよう。

非粘性流体に関しては 名著 [6] を見ると良い。たとえば 13・17・43 節あたりに、渦度方程式や圧力方程式について、圧縮性をも考慮した一般的な説明がある。しかし、非粘性流体の解と現実の流体現象との違いに目を向けることも重要である。その意味で、Feynman 物理学のなかの流体の章 (文献 [3], 第 19 章・第 20 章) をぜひ読んでみてほしい。

Poiseuille 流の話は たいていの教科書に載っているが、文献 [8] の 31–36 ページのように、複雑な計算をすべて省略して Hagen-Poiseuille の法則を導くという邪道 (?) な方法もある。

このプリントは 1997 年に執筆した原型を何度か改訂したものである。当初の原型を執筆するにあたって、主に [9, 10] を参考にした。

補遺

A Gaußの誤差関数

Gaußの誤差関数を

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds, \qquad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds \tag{A.1}$$

のような積分で定義する[15]。これらの関数の値は次の表のとおり:

x	$\operatorname{erf}(x)$	$\operatorname{erfc}(x)$
0.00	0.000000	1.000000
0.05	0.056372	0.943628
0.10	0.112463	0.887537
0.15	0.167996	0.832004
0.20	0.222703	0.777297
0.25	0.276326	0.723674
0.30	0.328627	0.671373
0.35	0.379382	0.620618

x	$\operatorname{erf}(x)$	$\operatorname{erfc}(x)$
0.40	0.428392	0.571608
0.45	0.475482	0.524518
0.50	0.520500	0.479500
0.60	0.603856	0.396144
0.70	0.677801	0.322199
0.80	0.742101	0.257899
0.90	0.796908	0.203092
1.00	0.842701	0.157299

x	$\operatorname{erf}(x)$	$\operatorname{erfc}(x)$
1.10	0.880205	0.119795
1.20	0.910314	0.089686
1.30	0.934008	0.065992
1.40	0.952285	0.047715
1.50	0.966105	0.033895
2.00	0.995322	0.004678
2.50	0.999593	0.000407
3.00	0.999978	0.000022

B ギリシャ文字

A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	e-psilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta

I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	o-micron
Π	π	pi

R	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	u-psilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi (khi)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	o-mega

[15] 本によって定義が違う場合があるので注意すること。