流体の数学

鳥取大 (工) 応用数理工学科 大西研究室

数理工学演習 I/II (2001-06-03 版)

概 要

このプリントは、学部 3 回生の科目である「数理工学演習 I/II」において、合計 4 週間の演習をおこなうことを念頭においている。第 1 週および第 2 週に第 **I** 部の演習をおこない、第 **II** 部の演習を第 3 週および第 4 週におこなう。

まず、演習が始まる前に、第 **I** 部の冒頭にある「流体の方程式を導くための準備」のなかの演習問題を予習しておいてほしい。第 1 週の演習では、これらの問題について小テストをおこなったあと、黒板で説明してもらう。そのあとの「『場』というもの」は 第 1 週のレポート課題である。

第 1 週の終了時に「流体力学の方程式」のなかの各課題の担当者を決めておき、第 2 週に結果を報告してもらうことにする。課題はそれぞれにまとまった内容をもっているので、担当を決めるときに あまり細分しないほうが良い。なお、場合によっては、課題報告をレポートとしてやり直してもらうこともありうる。そのあと、第 4 章のレポート課題を、演習終了後 2 週間をめどに提出すること。

第 **II** 部も、第 **I** 部とほぼ同じように進める予定である。つまり、第 3 週には「ベクトル解析の復習」のところを予習しておかなければならない。ただし、第 4 週の課題は、第 7 章のすべてではなく、適宜選択してもらうことになる。最後の第 8 章はレポート課題である。

なお、このプリントの訂正や補足説明を `http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/` に掲載するので、必要に応じて参照すること。

目 次

第 I 部　流体の方程式を導く **2**

1　流体の方程式を導くための準備 **2**
- 1.1　面積分と体積積分 . . . 2
- 1.2　Gaußの定理 . . . 3
- 1.3　添字記法 . . . 3
- 1.4　保存則とバランスの式 . . . 4

2　「場」というもの **5**

3　流体力学の方程式 **6**
- 3.1　流体における質量保存則 . . . 6
- 3.2　流体要素と物質微分 . . . 8
- 3.3　熱伝導方程式 . . . 8
- 3.4　非粘性流体の運動方程式 . . . 9
- 3.5　円柱を過ぎる非粘性の流れ . . . 10

4　レポート課題:「粘性のない流れ」 **11**

第 II 部　流体の運動を解析する **12**

5　ベクトル解析の復習 **12**
5.1　ベクトル場の微分に関する公式 12
5.2　渦の流れ 12

6　変数分離法 **13**

7　流体力学の方程式を解く **14**
7.1　渦度方程式 14
7.2　水の波 14
7.3　浅水波 15
7.4　音波の方程式 16
7.5　粘性流体の方程式 17
7.6　熱伝導 17
7.7　平面 Poiseuille 流 18
7.8　円管 Poiseuille 流 19
7.9　円柱を過ぎる遅い流れ 19

8　レポート課題:「粘性のある流れ」 **20**

A　ギリシャ文字 **21**

B　球面のパラメータ表示 **22**

C　Gaußの誤差関数 **22**

第 I 部
流体の方程式を導く

1　流体の方程式を導くための準備

1.1　面積分と体積積分

面積分または体積積分を用いて、次のものを求めよ。

(1) 領域 $V_1 = \{\, (x,y,z) \mid 0 < x < L_1,\ 0 < y < L_2,\ 0 < z < L_3 \,\}$ において、温度分布が

$$T = T_0 + T_0' z + \frac{1}{2} T_0'' z^2 \quad (\text{ただし } T_0,\, T_0',\, T_0'' \text{ は正の定数})$$

のようになっているとする。このとき、領域 V_1 のなかに存在する熱エネルギー[1]の総量 Q を求めよ。ただし、簡単化のため、物質の密度 ρ および質量あたりの比熱 c は既知の定数であるものとする。

ヒント：　もし体積 V 全体の温度 T が一定ならば、熱エネルギー Q は、熱容量 $C = \rho c V$ を用いて $Q = CT = \rho c T V$ により求められる。この式をどう応用するかがポイント。

[1] この用語は本当は正しくない — 本当は「内部エネルギー」や「エンタルピー」について論じるほうが正しい。しかし、ここでは「熱」についての直観的イメージを優先して、あえて「熱エネルギー」という昔ながらの用語を用いる。

(2) 領域 $V_2 = \{\ (x,y,z)\ |\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < z < h\ \}$ のなかに、

$$\rho = \rho_0\, e^{-(x^2+y^2)/a^2} \quad (\text{ただし } \rho_0,\, a \text{ は定数})$$

のような電荷密度分布が存在している。このとき、領域 V_2 のなかの電荷の総量 q_2 を求めよ。

(3) 電磁気学における **Gaußの法則**によれば、領域 V のなかに存在する電荷の量は、領域 V の 表面 S を貫いて内側から外側へ向かう電気力線の総量に等しい。
具体的に、領域 $V_3 = \{\ (x,y,z)\ |\ -3a < x < 3a,\ -2a < y < 2a,\ -a < z < a\ \}$ において 電束密度場 $\mathbf{D}$ が

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (0,0,+\epsilon_0 E_0) & (z > 0 \text{ において}) \\ (0,0,-\epsilon_0 E_0) & (z < 0 \text{ において}) \end{cases}$$

のように与えられているとき、V_3 に含まれる電荷の総量 q_3 を求めよ。

(4) 同様に、領域 $V_4 = \left\{\ (x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2 < a^2\ \right\}$ において

$$\mathbf{D} = (Kx, Ky, Kz)$$

のような電束密度場が存在しているとき、領域 V_4 に含まれる電荷の総量 q_4 を求めよ。

ヒント： 領域 V_4 の境界は球面だから、$\mathbf{n}dS$ も 極座標であらわす必要がある。補遺 B を参照せよ。

1.2 Gaußの定理

ベクトル解析でいう Gaußの法則 (**Gaußの定理**) は、

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \int_{V\ \text{の境界}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{1.1}$$

という恒等式である。電磁気学における “Gaußの法則” とは、関係はあるけれども概念的に別のものであるから[2]、混同してはいけない。

(1) 恒等式 (1.1) を、(いきなり一般的な V を扱うのは難しいので) V が微小領域の場合について証明せよ。つまり、領域 V を $V = \{\ (x,y,z)\ |\ x_0 < x < x_0+h_1,\ y_0 < y < y_0+h_2,\ z_0 < z < z_0+h_3\ \}$ とし、さらに h_1, h_2, h_3 は非常に小さいとして、式 (1.1) の右辺を計算すると左辺が得られることを示せ。(なお、一般の領域の場合については、領域 V を微小領域に細分化して証明すればよいが、ここでは省略する。)

(2) ベクトル場 $\mathbf{f}$ および 領域 V を 具体的に

$$\mathbf{f} = \left(1-z^2,\ x+y,\ 2z\right), \quad V = \left\{\ (x,y,z)\ |\ x^2+y^2+z^2 < a^2\ \right\}$$

として、式 (1.1) の左辺の値を求めよ。

(3) 上記の $\mathbf{f}$ および V に対し、式 (1.1) の右辺を正直に計算し、左辺の計算結果と一致することを確認せよ。

1.3 添字記法

ベクトル解析においては、

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \partial_j a_j$$

[2]文献 [1] に次のような言葉がある: “「公式」などと一口に言うが、数学に於ける公式は主に「恒等式」であり、物理学に於ける公式は、「方程式」である。...” (第 60 節「地球へ」より)

のように、同じことをあらわすのにも 場合に応じて さまざまな記法が用いられる。ここで 最後にでてきた

$$\partial_j a_j$$

のような書き方を、このプリントでは添字記法とよぶことにする。本当は $\sum_{j=x,y,z} \partial_j a_j$ のように書くべきなのであるが、添字記法では ふつう $\sum$ を省略し、そのかわり「添字が 2 つ重複していたら $\sum$ を補って考える」という約束になっている。

(1) 次のような関係式があるとして、これをまず成分で表記し、次に添字記法による略記を示せ。
  (a) $\mathbf{x} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
  (b) $\mathbf{h} = \mathbf{f}\cdot\nabla\mathbf{g}$
(2) 添字記法を用いて、次の式が成り立つことを示せ:

$$\nabla\cdot(f\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla f + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \tag{1.2}$$

1.4 保存則とバランスの式

何らかの量 (物質・エネルギー・電荷など) が空間に分布しており、領域 V におけるその総量 Q を考えることができるものとしよう。このとき、この分布量の時間変化は、一般的に

$$\frac{\partial}{\partial t}[\text{分布密度}] + \mathrm{div}\,[\text{流束項}] = [\text{生成項}] \tag{1.3}$$

という形の式に従う [16, §1]。式 (1.3) をバランスの式あるいは広義の保存則という[3]。

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ は何を意味するか? 物理的な意味を説明し、また、極限を用いた数学的な定義を示せ。
(2) バランスの式 (1.3) の具体例として、Q がエネルギーをあらわす場合を考えてみよう。ただし、話を簡単にするために、物質の巨視的な運動が激しくない (すなわち流れが比較的遅い) 場合に考察を限定する。すると、Q としては、運動エネルギーを無視して いわゆる熱エネルギーだけを考えればよく[4]、また 流体の圧縮や粘性摩擦による発熱も無視できるから、熱量 Q に対して狭義の保存則が成り立つ (生成項がゼロである) と考えられる。このとき、熱エネルギーの分布の時間変化は、次のような形の偏微分方程式で記述されるはずである:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0 \tag{1.4}$$

方程式 (1.4) の導出過程および記号の意味について、下記の考え方に従い、順を追って説明せよ。

- 領域 V を適当に空間に固定し、その中に存在する熱量を Q とすると、Q は体積積分を用いて書ける:

$$Q = \int_V \boxed{}\, dV.$$

- 熱エネルギーの分布の変化を考察するため、Q の時間変化を考える。これは

$$\frac{d}{dt}Q = +\Gamma - \Phi \tag{1.5}$$
$$\Gamma = [\text{領域 } V \text{ の内部での熱の生成量}]$$
$$\Phi = [\text{境界を通して } V \text{ の外へ出ていく熱量}]$$

[3] 生成項がゼロの場合が狭義の保存則である。
[4] 逆に、気体力学で考えるような速い流れでは、熱だけを切り離して考えることにはあまり意味がなく、内部エネルギーと運動エネルギーを一緒にしてエネルギー方程式を考える必要がある。エネルギー方程式の具体的な形については参考文献 [2, p.59] を見よ。

のような式であらわされるはずである。ただし、ここで考えているような状況では $\Gamma = 0$ である。

- 問題は Φ を数学的にどうあらわしたらよいかということで、それには、熱の移動を数学的にあらわす方法を考えておく必要がある。ちょっと考えると

$$J = [\text{単位時間・単位面積あたりの熱の移動量}]$$

とすれば良いような気がするが、これでは不十分だ。なぜなら、移動の方向が示されていないからである。そこで、J をベクトルにして $\mathbf{J}$ とし、これにより Φ をあらわす方法を考えよう。

- しかし、いきなり領域 V の境界面全体について Φ を求めるのは難しいので、境界面を微小な面に切り刻んで考えることにする。微小な面の面積を ΔS, 表向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として、この微小面をとおる単位時間あたりの熱量を $\Delta\Phi$ としよう (裏から表への移動を正とする)。このとき、$\Delta\Phi$ を $\mathbf{J}$ (と ΔS と $\mathbf{n}$) であらわすことができる。これをもとに、Φ を $\mathbf{J}$ であらわす式を導く。
- 以上の結果を式 (1.5) に代入し、これを体積積分のみの形に書き直す:

$$\int_V \Big[\qquad\qquad \Big] \, dV = 0 \tag{1.6}$$

- 領域 V は適当 (いいかげん) に取ったにもかかわらず式 (1.6) が成り立つことを考えて、T の時間変化を記述する偏微分方程式を導く。

(3) 流体の運動方程式を導くには、運動量 Π の分布を考える必要がある。しかし、いきなり空間的な分布 (無限自由度の系) を考えるのは難しいので、準備として質点系 (有限自由度の系) を考えることにしたい。まずは、質点 A と質点 B が力を及ぼしあう場合について、Newton の運動方程式を

$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$$
$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{B}} = \cdots$$

の形で書き直せ。また、この式が保存則をあらわしていることを説明せよ。

(4) 機関車を含めて 3 両連結で走る列車の運動方程式を上記のような形で記し、考察せよ。 特に、発車あるいは停車の場合を考え、このとき 狭い意味での運動量保存が成り立たないことを説明せよ。

2 「場」というもの

いままで、温度分布・電荷分布などという書き方をしてきたが、数学的には、"空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数" あるいは "空間座標 $\mathbf{r}$ と 時刻 t の関数" のことを場(field) と称するので、たとえば温度分布は温度場という場として考えられる。別の例をあげると、磁力線が空間に分布している様子は磁場(あるいは "磁束密度場") としてとらえられる。流体力学では、空間の各点ごとの速度を示す速度場が重要な概念である。

(1) 天気予報において用いられる場の例を挙げよ。
(2) 場にはベクトル場・スカラー場などがあるが、これらの違いは何か?
(3) コンピュータによるグラフ作成ツール (GNUPLOT や Ngraph など) を用いて[5]、以下のような場を図示せよ。
  (a) $\rho = \rho_0\, e^{-(x^2+y^2)/a^2}$
  (b) $s = s(x, y) = \exp\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

[5] 資料を http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/ に用意してあるので参考にすること。

(c) $\mathbf{u} = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (A\sin x\,\cos y,\ B\cos x\,\sin y)$

(d) $\mathbf{u} = (u,v), \quad u - iv = \begin{cases} (x+iy)^{-2} & (x^2+y^2 > 1) \\ 1 & (x^2+y^2 < 1) \end{cases}$

(e) $\mathbf{g} = \big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big) = \begin{cases} (0,+1) & (y > 0) \\ (0,-1) & (y < 0) \end{cases}$

なお、レポート作成にあたって 次の点に留意すること:

- それぞれの場について、スカラー場かベクトル場かを指摘せよ。
- 定数 ρ_0, a, A, B の値は適当に定める (ただし、0 とか 1 とかいったつまらない値は避けること)。
- スカラー場については、できれば鳥瞰図と等値線図の両方を提出すること (図 1 を参考にせよ)。
- ベクトル場は、たとえば次章の図 2 や §5.2 の図 3 のように、小さな矢印をたくさん描いて図示する[6]。単にスカラー場を 2 つ描いて「これがベクトル場です」などというのは失格である。

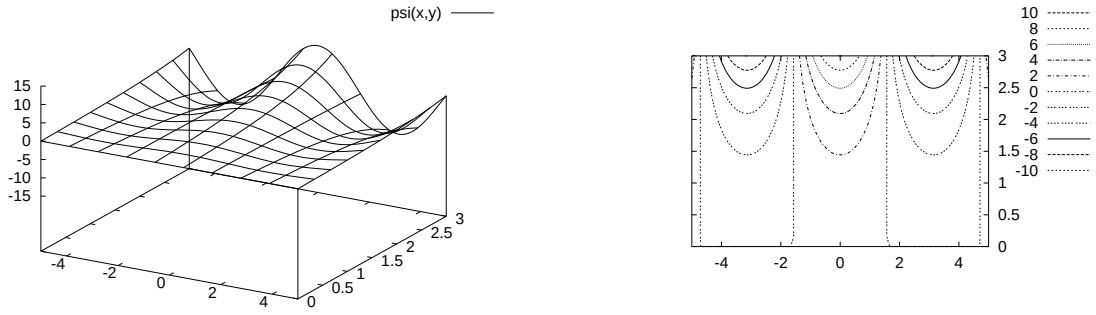

図 1: スカラー場 $\psi = \cos x \sinh y$ のグラフ: 左は鳥瞰図、右は等値線図

3 流体力学の方程式

今までの予備知識をもとに、流体における質量保存則 (連続の式)、および広義の運動量保存則 (**Euler** の運動方程式) をあらわす式を導く。また、関連するテーマとして、熱伝導方程式についても考察する。

3.1 流体における質量保存則

(1) ある時刻 $t = t_0$ における流れ場が次のように与えられているとする:

$$\mathbf{u} = (u,v,w) = (A\sin x\,\cos y,\ B\cos x\,\sin y,\ 0) \qquad [A, B \text{ は定数}] \tag{3.1}$$

ここで「場」という言葉が示すように $\mathbf{u}$ は (x,y,z) の関数であり、場所ごとに異なる速度を表している。定数 A, B を適当に決めて速度場を描くと、たとえば図 2 のようになる[7]。

[6] 矢印があまり長いと見にくいので、適当に縮めて描くこと。そもそも矢印があらわすのは「一点におけるベクトル値」なので、概念的には矢印の占める大きさは無限小でなければならない。

[7] 図 2 の流れのうち、少なくともひとつは、非圧縮流体では実現できない。 なぜだろうか?

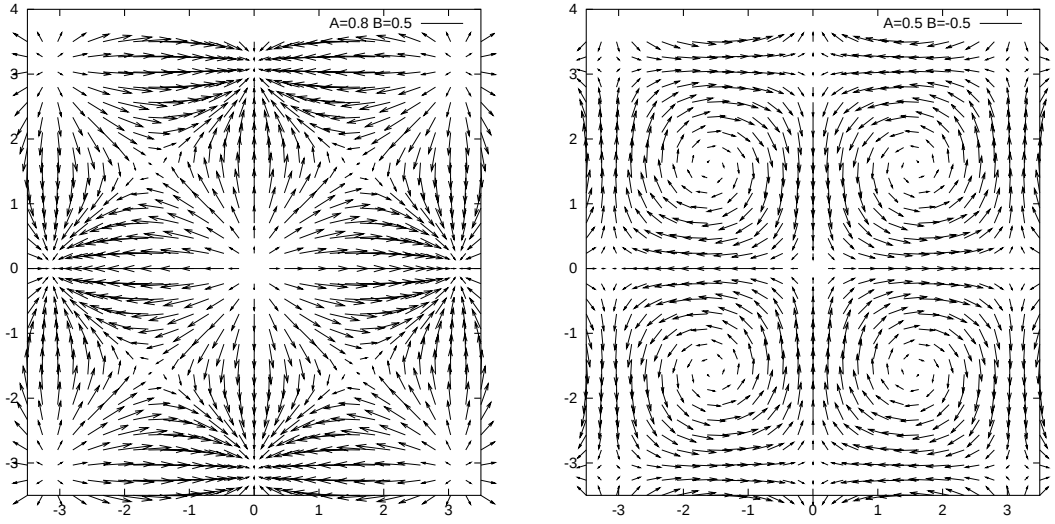

図 2: 式 (3.1) であらわされる流れ場の例

さて、『流体が非圧縮であるとすれば、式 (3.1) のなかの定数 A, B は ある関係式を満たすはずだ』という。この関係式を、次のような考え方にしたがって求めよ。なお、流体の密度はどこでも一定である ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$) と仮定する。

- まず、

$$V = \{\, (x, y, z) \mid x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ z_1 < z < z_2 \,\}$$

のような直方体状の領域 V を考える。領域 V は流体中に完全に浸かっているものとする。また、$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ は微小であるとは限らない。

この直方体の表面を S とし、S を構成する 6 つの面を S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, ... のように名付ける。

- 面 S_{x1} および面 S_{x2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_x M$ を求める。
- 同じく、面 S_{y1} および面 S_{y2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_y M$ を求める。
- 同じく、面 S_{z1} および面 S_{z2} を通じて時間 Δt のあいだに領域 V に入ってくる質量 $\Delta_z M$ を求める。
- 領域 V に含まれる全質量は $M = \int_V \rho\, dV$ である。もし流体が圧縮性ならば M は

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_x M + \Delta_y M + \Delta_z M}{\Delta t}$$

に従って時間変化するはずであるが、あいにく、今の場合、流体は非圧縮である。このことから、A と B のあいだに成り立つべき関係式が得られる。

(2) 上記の関係式を、以下のような方法を用いて求めてみよ。確かに同じ結果が得られることを確認すること。また、計算にかかる手間を比較してみよ。

- まず、一般論として、流体の質量密度を ρ とし、式 (1.3) の形で質量保存則を書きあらわす。
- もし流体が非圧縮かつ一様ならば ρ は定数である。このことから[8]、$\mathbf{u}$ が次の式を満たすことを示す:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{3.2}$$

- 具体的に式 (3.1) と式 (3.2) を考え合わせて、A と B のあいだに成り立つべき関係式を求める。

[8] じつは、仮に流体が一様でなくても非圧縮であれば $D\rho/Dt = 0$ が成り立ち、したがって、やはり式 (3.2) が成立する。

3.2 流体要素と物質微分

ある一定量の流体が、$0 < x < +\infty$ の範囲の空間を占めている。流体は連続体であるが、これを細分化して N 個の粒子 (流体要素) と見なし (もちろん $N \to \infty$)、その位置や速度と流体の密度との関係を考えよう。

(1) 流体の全質量を m とすると、粒子 1 個あたりの質量は $\mu = m/N$ である。
端から順番に粒子に番号 $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ をつけ、j 番目の粒子の位置 x_j は

$$x_j = \frac{j\lambda}{N-j}(1 + \epsilon \sin \omega t) \tag{3.3}$$

であるものとする。粒子番号を連続体に適用したものを物質座標と称し、ここでは $a = j/N$ で定義する。このとき、物質座標 a をもつ粒子の 時刻 t における位置 $x = x(a,t)$ および 速度 $u = u(a,t)$ を求めよ。

(2) 流体の密度 ρ について考えよう。一般に、Δx の空間範囲に k 個の粒子が入っていたら、そこでの密度は $\rho = k\mu/\Delta x$ である。式 (3.3) に基づいて、具体的に

$$\rho(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{k\mu}{x_{j+k} - x_j}$$

を計算し、ρ を x と t であらわせ。[ヒント: $N \to \infty$ の極限で $x_j \to x$, また $j \to Na$]

(3) 密度 ρ を a と t で書き直し、これにより、a を固定した時間微分

$$\frac{D\rho}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a \tag{3.4}$$

を求めよ。なお、式 (3.4) で定義される D/Dt のことを物質微分あるいは**Lagrange** 微分と称し、『流体要素の立場から見た時間微分』をあらわす[9]。

(4) 密度 ρ を x と t の関数と見て その時間微分を求め、次に、公式

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho(t+\Delta t,\, \mathbf{r} + \mathbf{u}\Delta t) - \rho(t, \mathbf{r})}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho \tag{3.5}$$

を用いて $D\rho/Dt$ を計算すると、式 (3.4) と同じ結果が得られることを確認せよ。

(5) 流体の密度 ρ および 速度 u が、1 次元の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

を満たすことを示せ。また、一般的な保存則の式 (1.3) を参考にして、式 (3.6) の 3 次元版を書き下せ。

3.3 熱伝導方程式

いきなり流体の運動方程式を考えるのは難しいので、より易しい問題として、熱の移動を記述する方程式[10]を考えることにする。

(1) 熱の移動には「伝導」「対流」「放射」の 3 つがある。それぞれについて、いくつか具体例を挙げて説明せよ。ただし、自分で体験したことのある例に限る (本で読んだだけの話ではだめ)。

[9] 物質微分は、式 (3.4) が定義であり、式 (3.5) はそこから導かれるものと考えるほうが、逆の考え方よりも明解であろう。

[10] 熱の問題だからといって熱力学の教科書を開いても、ふつうは無駄である。むしろ「輸送現象」とか「移動論」とか書いてある本を探すのがよい。

(2) 次の手順に従い、熱伝導方程式

$$\frac{D}{Dt}T = \kappa \triangle T \tag{3.7}$$

を導出せよ。なお、左辺の D/Dt は 式 (3.4) で定義される**Lagrange** 微分である[11]。具体的に Lagrange 微分を計算するには、公式 (3.5) を用いればよい。

- 熱量保存則を 式 (1.3) の形で書く。ただし、熱の移動は とりあえず $\mathbf{J}$ と置いておき、その内容はあとから考えることにする。また、熱量が保存するような状況を考えるので、熱の生成項、すなわち式 (1.5) における Γ の項は無視できるものとする。
- 熱の移動のうち、伝導による熱の流れは温度勾配 (距離あたりの温度差) に比例することが知られている。つまり、熱伝導による熱の移動を $\mathbf{q}$ と書くと、$\mathbf{q}$ は

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T \tag{3.8}$$

のように表される (**Fourier** の熱伝導の法則)。ここで λ は熱伝導率で、物質の種類によって決まる定数であると考えてよい[12]。

- 熱などが "流れに乗って" (すなわち物質の移動に伴って) 運ばれることを、移流(あるいは対流) という。流体の流速ベクトル場を $\mathbf{u}$ とし、これによる熱の移流を $\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$ と書くとき、

$$\mathbf{J}_{\mathrm{c}} = \rho c T \mathbf{u}$$

であることを示す。

ヒント： 時間 Δt のあいだに面 ΔS を通過する物質の体積をまず求め、これを熱量に換算する。

- 話を単純化するため、熱の移動のうち 放射による部分は無視できるものと見なす。
- 以上の結果を総合すると、流体中の熱伝導方程式が

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\mathbf{u}) = \kappa \triangle T \tag{3.9}$$

の形で得られる (ただし ρ, c, λ はいずれも定数であるとする)。あとは、非圧縮流体に関する連続の式 (3.2) を用いて方程式 (3.9) を書き直すと、方程式 (3.7) が得られる。

(3) 流れがない場合 (特に固体中の場合) の熱伝導方程式はどうなるか?

(4) 各物理量の単位を SI 単位系であらわすとき、κ の単位を求めよ[13]。

3.4 非粘性流体の運動方程式

流体の運動方程式を導くために、『x 方向の運動量』の広義の保存則を考え、バランスの式 (1.3) と同様の形に書き表す。ここでは、話を簡単にするため、非粘性流体に話を限ることにするが、粘性流体の場合も、応力の考察が複雑になるだけで、考え方は同じである。

(1) 空間に固定された領域 V を考え、この領域の内部の流体[14]がもつ x 方向の運動量を Π_x とする。流体の速度ベクトル場を $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とし、流体の密度を ρ として、Π_x をこれらの量であらわせ。

[11] 通常の時間微分 $\partial/\partial t$ が (x, y, z, t) を独立変数としたときの偏微分であるのに対し、Lagrange 微分 $D/Dt \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\partial/\partial t)_{a_x, a_y, a_z}$ は (a_x, a_y, a_z, t) を独立変数としたときの t による偏微分である。ここで (a_x, a_y, a_z) は物質座標を示す。

[12] 一般には λ は温度の関数であるが、温度の変化する幅が小さければ λ は定数と見なして良い。

[13] この結果を、あとで §7.6 で利用する。

[14] ここで考えるのは『領域 V を占める流体』ではなく『領域 V の内部』にある運動量だということに注意しよう。前者 (流体) は移動するが中身は変わらないのに対し、後者 (領域) は移動せず中身が入れ替わる。

(2) 運動量 Π_x の時間変化は

$$\frac{d}{dt}\Pi_x = -[\text{流れによる流出}] - [\text{応力による流出}] + [\text{外力による増加}] \tag{3.10}$$

のような式に従う。以下のような考察により、式 (3.10) の右辺を具体的に書き下せ。

- 体積あたりの x 方向の外力を f_x とする (これは (x, y, z) に依存するかもしれない)。
- 境界面をとおした運動量の出入りには、
  (a) 移流(=流れに乗ってはこばれること) によるもの
  (b) 応力(=面をとおしてはたらく力) によるもの
  がある。まず移流のほうを考えよう。微小面 ΔS をとおして移流によって出ていく運動量 (x 成分、単位時間あたり) を

$$\Delta\Phi_x = \boxed{} \cdot \mathbf{n}\Delta S$$

  の形であらわし、これを用いて、領域 V の境界全体からの移流による流出量 Φ_x を求める。
- 領域 V の境界面から応力という形で出ていく運動量 (の x 成分、単位時間あたり) を Ψ_x とする。ここでは、話を簡単にするため、流体は非粘性流体であるものと仮定しよう。すると、応力として圧力だけを考えれば良いことになる[15]。圧力には決まった方向性はなく、任意の面に垂直に働く性質がある (**Pascal** の原理) ので、面積あたりの力は $p\mathbf{n}$ であり[16]、その x 成分は pn_x である。これにより、Ψ_x を、p を用いた表面積分の形であらわすことができる。

(3) Gaußの発散定理などを利用して 式 (3.10) を変形し、(1.6) のような体積積分のみの形に直せ。ここで V の取り方は任意であり、どのように V をとっても上で得られた式が成り立つということから、非粘性流体の運動方程式 (**Euler** 方程式) の x 成分を導け。

(4) 同様に、y 成分、z 成分に関する式を示せ。

(5) 上記の方法で導いた運動方程式を適当に書き直すと

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{3.11}$$

のようになることを示せ。

ヒント: まず、運動方程式を添字記法で書き、次に連続の式を利用して運動方程式を変形する。

3.5 円柱を過ぎる非粘性の流れ

せっかく運動方程式 (3.11) を導いたので、何か試しに解を求めてみることにしよう。ここでは、速度 U の一様流のなかに置かれた、半径 $D/2$ の円柱のまわりの流れを求めることにする。

話を簡単化するために、次のような仮定をおこなう:

- 流れは定常 ($\partial_t = 0$) で、かつ 2 次元的
- 流体の密度は一定 ($\rho = \text{const.}$)
- 外力は存在しない ($\mathbf{f} = 0$)

[15] 粘性流体では、圧力のほかに粘性応力を考える必要がある。式 (7.12) を参照せよ。

[16] 面の裏側の流体が表側に与える運動量 (=及ぼす力) の向きは $\mathbf{n}$ と同じ向きなので、符号は正でよい。

このとき、流れの支配方程式 [すなわち連続の式 (3.2) および運動方程式 (3.11)] は次のように書き直せる:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \tag{3.12}$$

$$\rho\left(u\partial_x + v\partial_y\right)\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{bmatrix} p \tag{3.13}$$

(1) 方程式 (3.12) の一般解は

$$u = +\partial_y\psi, \quad v = -\partial_x\psi \tag{3.14}$$

で与えられる[17]。式 (3.14) を方程式 (3.12) に代入し、たしかに解であることを確認せよ。

(2) 式 (3.14) を運動方程式 (3.13) に代入して整理すると

$$\begin{vmatrix}\partial_x\nabla^2\psi & \partial_x\psi\\ \partial_y\nabla^2\psi & \partial_y\psi\end{vmatrix} = 0$$

のようになることを示せ。したがって、とにかく

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{3.15}$$

となるようにすれば等号が成り立つことが分かる[18]。

(3) もし円柱の影響がなければ $\mathbf{u} = (u, v) = (U, 0)$ すなわち $\psi = Uy$ である [式 (3.14) に代入し確認せよ]。円柱の影響を考慮するため、定数 U を $F = F(r)$ で置き換えて

$$\psi = Fy \qquad \left(\text{ただし } F = F(r),\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{3.16}$$

と置く。式 (3.16) を Laplace 方程式 (3.15) に代入して整理すると、F に関する 2 階の常微分方程式となることを示し[19]、その一般解を求めよ。

(4) 境界条件 (円柱表面および無限遠での $\mathbf{u}$ の条件) を考慮して定数を定め、$\mathbf{u}$ の式を書き下せ。また、速度場 $\mathbf{u}$ を図示せよ (GNUPLOT などを用いて作成し、演習の時間に資料として配布できるように あらかじめ用意しておくこと)。

> 注意: ここで求めた解は、粘性の影響が無視できるという前提条件に基づいているが、この解は現実の実験 [4] とほとんど全く合わない。これは、流体の粘性が大きいためではない (たいていの場合、粘性そのものの値はむしろ小さい)。粘性の影響はむしろ間接的であって、直接には、境界層が剥離して非回転の仮定 (3.15) が破れることが本質的である。逆に言えば、境界層が剥離しないような物体では、粘性のない非回転流としての扱いは良い近似となりうる。

4 レポート課題: 「粘性のない流れ」

Feynmann 物理学の「粘性のない流れ」(文献 [5] 第 19 章) を読み、他の文献 (たとえば文献 [6] の第 7 章など) も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。

- 流体の運動方程式 (連続の式・Euler の運動方程式)

[17] 式 (3.14) は $\mathbf{u} = \mathrm{rot}(\psi\mathbf{e}_z)$ とも書ける。つまり、$\psi\mathbf{e}_z$ は $\mathbf{u}$ のベクトルポテンシャルである。

[18] もちろん、これは Euler 方程式 (3.13) の一般解というわけではなく、他にも解が存在する。また、2 次元で Laplace 方程式 (3.15) を解くには 複素関数論を利用するのが一般的である [3, §4]。しかし、ここではあえて複素関数論を使わない解法を試みることにする。

[19] もし常微分にならないならば、そもそも式 (3.16) のように置いたのが失敗ということになる。

- 定常流における Bernoulli の定理 (導出・物理的意味・関連する実験事実)
- 渦度と循環 (円柱を過ぎる流れ・Helmholtz の渦定理・渦輪の発生と運動)

第 II 部
流体の運動を解析する

5　ベクトル解析の復習

5.1　ベクトル場の微分に関する公式

(1) ベクトル場 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ が

$$\mathbf{p} = (x + 2y, xy, 1), \qquad \mathbf{q} = (x^2 + 3y^2, xyz, 0)$$

のように与えられている。このとき、$\mathbf{p} \times \operatorname{rot} \mathbf{q}$ および $\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{q}$ を求めよ。

(2) ベクトル場 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を計算せよ。結果はなるべく整理した形で示すこと。

(3) スカラー場 f に対しては

$$f \operatorname{grad} f = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(f^2\right)$$

が成り立つが、ベクトル場 $\mathbf{f}$ の場合は $\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{f}$ と $\frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\mathbf{f}^2\right)$ が等しいとは限らないことを説明せよ。

(4) ベクトル場 $\mathbf{f}$ に対し、

$$\mathbf{f} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{f} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\mathbf{f}^2\right)$$

は $\mathbf{f}$ と $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ の外積を用いてあらわせることを示せ。

5.2　渦の流れ

典型的な渦流れは、おおよそ 次のような速度分布を示す (図 3 を参照):

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = \begin{cases} (-by, bx, 0) & (\sqrt{x^2 + y^2} \leq a) \\ \left(-\dfrac{ba^2 y}{x^2 + y^2},\ \dfrac{ba^2 x}{x^2 + y^2},\ 0 \right) & (\sqrt{x^2 + y^2} > a) \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで a, b は定数である。式 (5.1) であらわされる渦のことを**Rankine 渦**という [6, p.18]。

(1) Rankine 渦 (5.1) において、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の分布はどのようになっているか?

- まず $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ を計算する。
- 次に、渦度場 $\boldsymbol{\omega}$ を図示する[20]。

[20] 本当は 3 次元で考えるべきなのだけれども、今の場合、渦度場を 2 次元の擬スカラー場と見なすことができるので、スカラー場のように図示してかまわない。

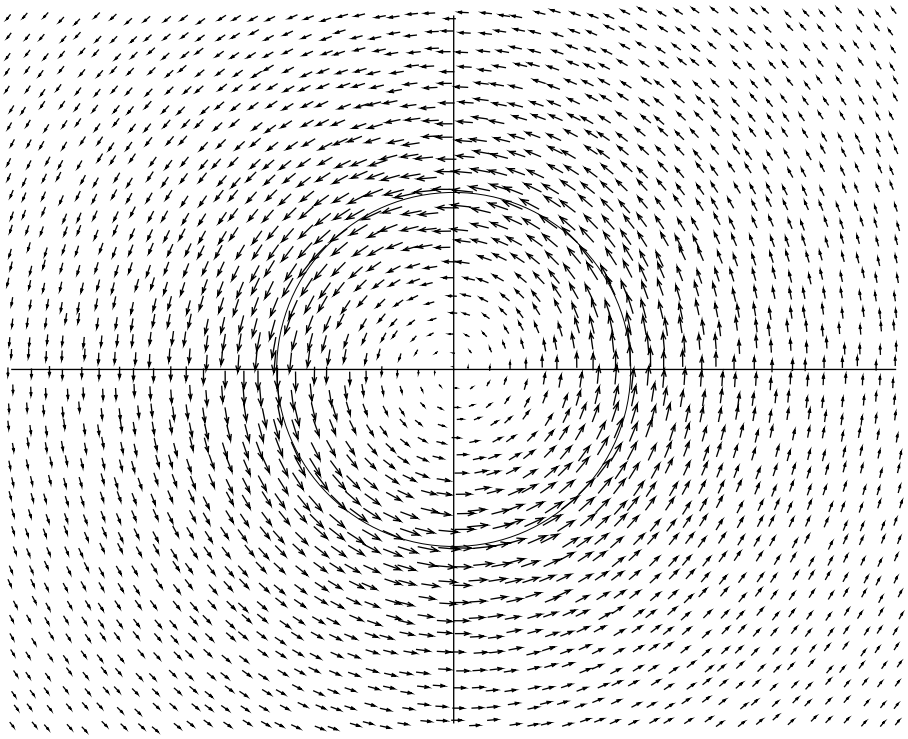

図 3: Rankine 渦による速度場 (5.1) の様子

(2) 回転流れを特徴づける量として循環という量があり、これは閉曲線にそって

$$\Gamma[C] = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

を計算することにより求められる。具体例として、次の閉曲線に関する循環 Γ を求めよ。

(a) (x, y)-平面上の、原点を中心とする半径 c の円周 (注意: 場合分けが必要!)

(b) $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (0,a,0) \to (0,0,0)$ のような三角形

(c) $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (a,a,0) \to (0,a,0) \to (0,0,0)$ のような四角形

(3) ベクトル解析における Stokes の定理を用いて 渦度から循環を求めることができる。この方法を用いて 前問の 3 つの場合における循環を計算し、結果が一致することを確認せよ。

注意: 式 (5.1) のような渦 (**Rankine** 渦) において、$|\mathbf{r}|$ が大きいところでは $\omega = 0$ となるから、その意味で、遠方での流れは「非回転流れ」である。しかし、確かに渦度はゼロだけれども、流れ場は渦を巻いているように見えるし、それに循環はゼロでない値を持つから、なんだか納得しにくいかもしれない。これは、要するに「渦度」という名前が誤解のもとなのである。渦度というのは、いわゆる渦の有無を示すものではなく、流体要素の自転を示す量であって、渦巻き流れ (いわば公転運動) を示すものではない。局所的な渦度の有無と 全体として渦巻き的な流れがあるかどうかは、別の問題である (もちろん関係はあるけれども)。

6 変数分離法

偏微分方程式を解くための常套手段である変数分離法について復習しておく。

(1) 1 次元の音波を記述する方程式 (7.11) の解を、変数分離法により求めよ。なお、境界条件は自分で適当に設定すること (無限領域でも有限領域でも どちらでもいいから、自分の好きなほうを採用せよ)。

(2) 1 次元の熱伝導方程式 (7.17) において、$T = T_0 + \theta$ (ここで $T_0 = \text{const.}$) と置き、境界条件を $\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\ell} = 0$ とする。このとき、変数分離法により一般解を求めよ。

7 流体力学の方程式を解く

この章では、各グループごとに、3 つの課題について発表してもらう。

- 問題 7.1 および 7.5 は必修課題とする。
- それ以外の問題から、どれか 1 つを選択する。ただし、他のグループが既に発表した問題は選択できない。

誰がどの問題のどの部分について発表するか、あらかじめ分担を決めておくこと。また、演習が終わったあと、指定された期日までに、選択課題についてのレポートを提出すること (基本的に、第 8 章のレポートと一緒に提出してもらう予定である)。

7.1 渦度方程式

流体の粘性および圧縮性を無視し、流れは**Euler** 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{7.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = - \operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{7.2}$$

に従うものとしよう。ただし $\rho = \text{const.}$, $\mathbf{f} = (0, 0, -\rho g)$ である。

(1) 下記の方針に従い、Euler 方程式を式変形して渦度方程式を導け。

- 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ を用いると、Euler 方程式 (7.2) は次のように書き直せる:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \rho^{-1} \operatorname{grad} p - \rho^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \tag{7.3}$$

- 方程式 (7.3) から渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{7.4}$$

を導出する。

(2) 渦度方程式 (7.4) の一般解を求めるのは困難であるが、それでもいくつかの解が容易に求められる。特に

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi \tag{7.5}$$

のような流れでは $\boldsymbol{\omega} = 0$ (非回転流れ) であり、したがって式 (7.5) は渦度方程式 (7.4) の解のひとつであることを示せ (もちろん一般解ではない)。なお、Φ を 流れポテンシャルと称する。

7.2 水の波

非回転流れ ($\boldsymbol{\omega} = 0$) は流れポテンシャル Φ を用いて式 (7.5) のように表すことができる。水の波(水面重力波) に伴って生じる流れは非回転流れと見なせるから[21]、流れポテンシャルを用いて簡単な考察をしてみよう。

[21] 粘性の影響は、通常、水底の境界に接する薄い層状領域 (境界層) にのみ現われ、それ以外の部分では ほぼ完全に無視できる。

(1) 非圧縮という条件から、Φ の満たすべき微分方程式を求めよ。
(2) 水底を $z=-h_0$, 水面を $z=0$ 付近とする。流れは (x,z) 面のなかでのみ生じると考え、速度ベクトルを $\mathbf{u}=(u,0,w)$ とする (y 成分はゼロ)。このとき、$\Phi=F(x)G(z)$ と置くことによって Φ の方程式を 1 変数の微分方程式 (常微分方程式) に分離せよ。
(3) 波長を λ とし、さらに水底での境界条件を与えることにより、解 Φ を求めよ[22]。また速度場を求め、その特徴を論じよ。特に、水面での速度と水底での速度の違いを、$\lambda \gg h_0$ (浅水波) および $\lambda \ll h_0$ (深水波) という両極端の場合について考察すること [7, §7-3]。

- 水面の水だけが動き、水底の水は静止しているのは どちらの場合か?
- 水面の水の動きに連動して水底の水も一緒に根こそぎ動くのは、どちらの場合か?

7.3 浅水波

波長 λ に比べて 水深 h_0 が比較的浅い場合を考えよう。このような場合の水の波を浅水波と称する。前節の最後で考察したように、浅水波では水面から水底まで水があたかも一体となって動くかのように考えても良い。したがって、次のような近似をして良いので、解析が簡単になる:

- 速度 u は z にはよらず、x と t だけの関数だと見なしてよい (もう少し正確に言うと、$|\partial_z u| \ll |\partial_x u|$ なので $\partial_z u=0$ と近似できる)。
- 垂直方向の速度 w は小さい (u に比べて無視できる)。

また、運動エネルギーが重力の位置エネルギーを超えてしまうほど大きな波は考えにくいので、

$$\frac{\rho}{2}|\mathbf{u}|^2 < \rho g h$$

が成り立つものとする[23]。このとき、波の伝わりかたについて もう少しくわしく調べてみよう。

(1) 水があるのは、z 方向に関して言えば水底 ($z=-h_0=\text{const.}$) から水面 ($z=\eta$) までである。また、計算の便宜上、$y=\pm b/2$ に側壁があるとしよう。このとき、$x_1<x<x_2$ の範囲にある水の量 M は

$$M=\rho b\int_{x_1}^{x_2}(h_0+\eta)\,dx \simeq \rho b h \Delta x \tag{7.6}$$

であることを示せ (ただし $h_0+\eta=h,\quad x_2-x_1=\Delta x$ とおいた)。さらに、水量 M の時間変化を考慮することにより、浅水波における “質量保存の式” を導け[24]:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hu)}{\partial x}=0. \tag{7.7}$$

(2) Euler 方程式 (7.2) の z 成分を書き出し、浅水波近似および他の前提条件を考慮して方程式を簡単化せよ。さらに、このとき、圧力 p が次のように求められることを説明せよ:

$$p=p_0+\rho g(\eta-z)=p_0+\rho g(h-h_0-z). \tag{7.8}$$

[22] さらに解の時間発展を考察するには表面での境界条件が必要だが、一般的な場合を考察するのは少し難しいので省略し、浅水波の場合について次節で紹介するにとどめる。
[23] 特に、振幅の小さい波では $\rho|\mathbf{u}|^2/2 \ll \rho g h$ が成り立つ。
[24] 式 (7.7) は 1 次元での圧縮性流体に対する連続の式 (3.6) に似ている。

(3) Euler 方程式の x 成分を抜きだし、これに浅水波近似および式 (7.7), (7.8) を組み合わせることにより、次のような方程式が得られることを示せ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\boxed{\qquad} = 0 \tag{7.9}$$

(4) 方程式 (7.7) と (7.9) を組み合わせたものが、浅水波の発展を記述する方程式である。簡単な例題として

$$h = h_0 + \epsilon\hat{\eta}e^{ikx-i\omega t}, \quad u = \epsilon\hat{v}e^{ikx-i\omega t}; \qquad |\epsilon| \ll 1 \tag{7.10}$$

のような 波数 k の波の運動について考察してみよ。たとえば 波の速度はどのようになるか?

- ここで ω は角振動数をあらわす (渦度ではない)。
- 上記の式では、波動をあらわすのに複素数表示を用いている。複素数表示に慣れていない人は

$$h = h_0 + \epsilon\,|\hat{\eta}|\cos(kx - \omega t + \phi_1)$$

のように 実数表示に直して考えても良い。

(5) もうひとつ、簡単な場合として、衝撃波あるいは跳水[25]に対応する場合について考えてみる。状況は次のようになっているとする:

- 衝撃波が、右側の静止した水域 $(u = 0, \quad h = h_1)$ に向かって速度 c で進んでいる。
- 衝撃波の左側の水域では $u = u_2 \neq 0, \quad h = h_2 > h_1$ である。

さて、右側および左側での水面の高さ (h_1, h_2) が与えられているとき、c を求めることができるか?

ヒント: すべての流れが定常に見えるように、衝撃波とともに速度 c で進む観測者を想定し、この観測者から見た保存則を考える (文献 [8, §100] を見よ)。

7.4 音波の方程式

微小な圧力変動が気体中を伝わる現象について、圧縮性流体の方程式をもとに解析してみよう。

(1) 次の方針により、音波が波動方程式

$$\partial_t^2 p - a^2\partial_x^2 p = 0 \tag{7.11}$$

に従うことを示せ。ただし、簡単化のため、1 次元で考える。

- 気体の運動は、連続の式、Euler 方程式、および断熱圧縮の式

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

に従うものとする。ここで p_0 および ρ_0 は定数であり、ここでは標準状態における空気の圧力および密度に等しいものとする。また γ は比熱比で、空気の場合には約 1.4 である。

- 微小な圧力変動と、それに伴う微小な密度変動・速度変動を考え、

$$p = p_0 + \epsilon p_1, \qquad \rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + O(\epsilon^2), \qquad u = \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)$$

とする。これを各方程式に代入して ϵ のべきで展開し、ϵ は小さいとして $O(\epsilon^2)$ の項を無視する。

- 変数を消去し、方程式の数を減らして 1 本の方程式にまとめる。

(2) 上記の方針によって求めた音波の方程式に基づき、標準状態における空気の圧力および密度を用いて音速を計算せよ。妥当な値が得られるだろうか?

[25] 津波やボアなどがその実例である。

7.5 粘性流体の方程式

流体運動において粘性が完全に無視できるのは例外的な場合であって、ふつうは粘性が無視できない。したがって、粘性を考慮した流体の運動方程式が必要になるが、そのような方程式を導くには、式 (3.10) において 応力の項だけ直せばよい。ふつうの流体[26]では 粘性応力は $\partial_x u, \partial_y u, \text{etc.}$(速度勾配) の線形結合に比例する。さらに、対称性の考察 [9, §1-9] あるいは統計力学的な理論 [10, p.454] から粘性応力の形が決定され、**Navier-Stokes** 方程式が導かれる。

(1) 圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式はかなり複雑だが、非圧縮流体の場合には、粘性応力 τ'_{ij} が

$$\tau'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{7.12}$$

のような比較的簡単な式で与えられる。このことから、Navier-Stokes 方程式を

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{7.13}$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho}\mathbf{f} + \boxed{} \tag{7.14}$$

の形で導け。また、方程式 (7.14) を成分表示で書きなおせ。

(2) 非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (7.14) から圧力 p を消去し、渦度拡散方程式を導け (ただし、簡単化のために $\mathbf{f} = \text{const.}$ とする)。また、非粘性の場合の渦度方程式 (7.4) と結果を比較せよ。

(3) 特に簡単な場合として、$y = 0$ および $y = b\ (> 0)$ にある 2 枚の平面壁にはさまれた狭い流路を x 方向にまっすぐ流れる定常流 (平面 **Poiseuille** 流) を考えよう。このとき、渦度拡散方程式は

$$\partial_y^2 \omega = 0 \tag{7.15}$$

のように簡単化されることを示せ。(ヒント: まず連続の式から $\partial_x u = 0$ を示す)

(4) 簡単化された渦度方程式 (7.15) の解を求め、これと

$$\text{壁面上で} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7.16}$$

という条件 (粘着条件[27]) から 速度場 $\mathbf{u}$ を求めよ。

7.6 熱伝導

粘性流体の方程式である渦度拡散方程式は、見方によっては、熱伝導方程式 (3.7) によく似ている。そこで、粘性流体にとりかかかる前に、簡単な熱伝導の問題を解いてみよう。話をなるべく単純にするため、1 次元の問題を考え、また流れは存在しないものとして、熱伝導方程式 (3.7) を

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T \tag{7.17}$$

のように単純化して考える。問題設定は次のようにしよう:

> 長い鉄の棒があって $0 < x < +\infty$ の範囲を占めている。時刻 $t = 0$ までは この棒の温度は一様であったので、$T|_{t=0} = T_0 = \text{const.}$ であった。しかし、時刻 $t = 0$ において、棒の端を 温度

[26] 水や空気や水飴など、低分子より成る流体を指す。逆に言えば、血液や澱粉糊やマヨネーズは対象外である。

[27] 粘着条件は実験事実である。たとえば、コーヒーに少しだけクリームを入れ、スプーンでかきまぜて観察してみると良い。あるいは、実験の写真 [11, p.114] を見よ。ただし、気体では多少のすべりが生じる場合があると言われている。

$T_{\rm w}(=T_0+T_1)$ の壁に接触させたため、壁から熱が伝わりはじめた。この壁にはヒーターか何かが仕込んであって、そのために壁の温度は常に $T_{\rm w}$ に保たれている。つまり、棒の一端 $(x=0)$ の温度は 常に $T_{\rm w}$ であり、ここから x 軸にそって熱が伝わっていくことになる。このとき、この鉄棒における温度分布の様子やその時間変化を知りたい。

この問題を、1 次元熱伝導方程式 (7.17) を用いて考察しよう (§3.3 を参照すること)。

(1) まず、次の方法にしたがって 方程式 (7.17) の初期値・境界値問題の解を求めよ。

- 解の形を $T=T_0+T_1f(\eta),\quad \eta=\text{const.}\times\kappa^\alpha x^\beta t^\gamma$ のように仮定する。このような解が本当に存在するなら、η はちょうど無次元化された変数になるはずである。この条件をみたすように α,β,γ の値を定める[28]。
- 連鎖則を用いて $\partial/\partial x$ および $\partial/\partial t$ を $d/d\eta$ であらわす。
- 熱伝導方程式を η を用いた形に書き直す (これで常微分方程式になれば成功である)。これに合わせて境界条件も書き直す。
- この常微分方程式を解いて f を求める。
- 最終的に、温度場 T を 時間 t と空間座標 x の関数として求める。

(2) 次に、温度場の空間変化および時間変化の様子を示すため、結果を図示せよ。

- 時刻 $t=t_0$ (>0) での温度場を図に描く (GNUPLOT などを用いて正確な図を作ること)。
- 同様に、$t=t_1=4t_0$ での温度場を図に描き、時刻 $t=0$ での温度場と比較する。

(3) 壁から $x=x_{\rm H}$ までの領域は $T>T_{\rm w}-T_1/2$ となるような高温領域である。時間の経過とともに高温領域がしだいに広がっていく様子を図示し、説明せよ。

7.7 平面 Poiseuille 流

非圧縮 Navier-Stokes 方程式を解くことは、一般には非常に難しいが、それでも手計算で解ける例がいくつか知られている。そのような、手計算で求められる解のなかでも最も有名な例として、静止した壁をもつ狭い流路を流体がまっすぐに流れる場合 (**Poiseuille** 流) をあらわす解を求めてみよう。

まず、平面壁の場合を考える。流体は $y=0$ および $y=b$ (>0) にある 2 枚の壁にはさまれた水路を x 方向に流れているとしよう。外力はゼロであり、流れは定常である。壁の端のことは考えない。また z 方向のことも考えない。

(1) 水路の様子を図に描け。
(2) 次のような方針に従って方程式を簡単化し、解を求めよ。

- 流れは常に x 方向であるから、$\mathbf{u}=(u,0,0)$ とおく。このとき、連続の式から重要な条件が得られる。
- 運動方程式 (7.14) を成分別に書きくだし、ゼロとなる項を指摘して式を簡略化する。
- 偏微分方程式のままでは解けないので常微分方程式に直す。今の場合、$-\partial_x p=\lambda$ とおくと、λ を分離定数とする "変数分離" の形になる。(確かに λ が定数になることを示せ!)
- 分離して得られた常微分方程式を解いて解を求め、速度 $\mathbf{u}$ を 圧力 p であらわす。なお、境界条件として粘着条件 (7.16) を課す。

[28] 任意定数が残る場合は、$\beta=1$ となるように決めると あとの計算が楽になる。

(3) 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ を求めよ[29]。結果を簡単な図に描いて考察せよ。式 (7.15) の結果と比較してみると良い。
(4) 具体例で考えてみよう。岩のあいだに 1mm のすきまがあり、そこを水 (密度 $1\ \mathrm{t/m^3}$, 動粘性率 $10^{-6}\mathrm{m^2/s}$) が流れている。岩のこちら側では圧力は 1 気圧 (=1000hPa) であり、岩のすきまを 1 km ほどさかのぼったところでは 1.2 気圧の圧力がかかっている。このとき、すきまの中央 ($y = b/2$) での流速を求めよ。

ヒント： まず圧力勾配を求める。変数に数値を代入するときは単位をつけて代入すること [12, p.21]。

7.8 円管 Poiseuille 流

実際の応用で重要な例として、円管の場合を考える。このためには座標を円筒座標に直しておくほうが良い。

(1) ふつうの座標 (x, y, z)—**Descartes** 座標—と 円筒座標 (r, θ, ζ) のあいだの関係式が

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \zeta) \tag{7.18}$$

であるとして、$\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ を $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ で表せ。
[注意: 演算子を含む計算では順番を勝手に変えてはいけない。$e^{-x^2}\partial_x\phi$ と $\partial_x e^{-x^2}\phi$ は異なる!]
(2) 加減法 (中学校で習った) を用いて、上記の関係式の逆を求めよ ($\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ を $\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ で表わす)。
(3) 細い管の流れ[30]では流れは常に軸に平行だとして良い。そこで $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ は軸方向の単位ベクトル) とし、また 流れは定常かつ軸対称だとする。さらに、外力 $\mathbf{f}$ はゼロだとしよう。このような条件のもとで、Navier-Stokes 方程式 (7.13)–(7.14) を円筒座標に書き直せ (明らかにゼロになるような項は省略すること)。
(4) 解くべき方程式を 2 つの常微分方程式に分離し、さらにこれを解いて速度 u を求めよ。ただし壁面 ($r = a$) では粘着条件を課す。
(5) 管の断面を通る単位時間あたりの体積流量 Q を求めよ。他の条件を一定にして a を変えたとき Q はどのように変化するか? (これが**Hagen-Poiseuille** の法則[31]である。)
(6) 内径 $2a = 0.4$mm、長さ 15cm の毛細管に水をとおす。3 分で 100 $\mathrm{m}\ell$ の水をとおすために必要な圧力を計算せよ。さらに、この圧力を水深に換算するとどれくらいになるか求めよ。(物理学実験の授業で粘性係数を測ったことのある人は、自分の経験と一致しているかどうか考えること。)

7.9 円柱を過ぎる遅い流れ

問題 3.5 と同じような状況の流れを、こんどは、粘性を考慮した方程式によって解析してみよう。出発点としては、2 次元の渦度拡散方程式

$$(\partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla)\,\omega = \nu\nabla^2\omega$$

において 定常性 ($\partial_t = 0$) を仮定し、さらに

$$\mathbf{u}\cdot\nabla \simeq U\partial_x$$

と近似したものを用いる (**Oseen** 近似)。この近似は、粘性が比較的大きいときに有効である[32]。

[29]渦度という名前はしばしば誤解をまねくが、$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ は 渦というより むしろ流体要素の回転 (自転) を示すものである。
[30]太い管では以下の条件が成り立たない。どれくらい細ければよいかは流速と粘性に依存する。このことを確かめたのが、有名な Reynolds の実験 [7, §8-1] である。
[31]土木学者 Hagen と医学者 Poiseuille は、実験によってそれぞれ独立にこの法則を発見した。なお、文献 [13, pp.31-36] のように、複雑な計算をすべて省略し いきなり Hagen-Poiseuille の法則を導くことも可能である。
[32]...ということは、粘性が大きくもなくゼロでもないような場合は、近似解は使えないことになる (そういう場合にも成り立つ近似を考えるのは不可能ではないかもしれないが、ものすごく難しい)。

(1) 変数をうまく置き直すと、渦度方程式は

$$\left(\nabla^2 - \alpha^2\right)\Omega = 0 \tag{7.19}$$

のような形に書きなおせることを示せ。また、α の次元を求めよ。

ヒント： まず $\omega = \Omega e^{+\alpha x}$ と置いて代入し、次に α の値を適切に選ぶ。

(2) 円柱の近く ($\alpha r \ll 1$ となる領域) では[33]、方程式 (7.19) において α の項を無視することが可能であり、また $\omega \simeq \Omega$ となるから

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\omega = 0$$

として良い。この方程式を極座標で書き直し、無限遠で $\omega \to 0$ という条件のもとで一般解を求めよ。ただし、原点近傍では発散があっても良いものとする[34]。

(3) 流れ関数ψ を式 (3.16) のように仮定し、これから渦度 ω を計算して、これを上で求めた結果と等しいと置くことによって流れ場を求めよ。

(4) 渦度 ω および流れ場 $\mathbf{u}$ を図示せよ (GNUPLOT を用いること)。

注意: 上記の解析では α は小さいとして無視しているが、この近似は球の近くでしか成り立たないから、無限遠での境界条件をあてはめて解を確定することができない。無限遠まで成り立つ解を得るには、α を含めて方程式 (7.19) を解く必要がある (たとえば文献 [9] を見よ)。

8 レポート課題: 「粘性のある流れ」

Feynmann 物理学の「粘性のある流れ」(文献 [5] 第 20 章) を読み[35]、他の資料 (文献 [6] の第 9 章・第 10 章や、流れの実験の写真集 [4, 14] など) も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。

- Reynolds 数とは何か?
- 2 つの円筒のあいだの Couette 流 (**Taylor-Couette** 流):
  流れは壁に平行な定常流であると仮定して、手計算で解を求め、この解と実際の実験結果が一致するための条件について調べよ。また、この条件が破れると、実験ではどのような流れが観察されるか?
- 円柱を過ぎる流れ:
  Reynolds 数の大きさをいろいろ変えると、流れの様子はどのように変化するか?

このレポートと一緒に、第 7 章の選択課題のレポートも忘れずに提出すること。

参考文献

[1] 吉田武. ケプラー・天空の旋律. 共立出版, 1999.

[2] 巽友正. 流体力学. 新物理学シリーズ 21. 培風館, 1982.

[3] 今井功. 流体力学 (前編). 物理学選書 14. 裳華房, 1973.

[33] このような領域が存在するためには、円柱の直径 D が $\alpha D \ll 1$ を満たす必要がある。つまり、流れの Reynolds 数が小さくなければならない。

[34] 円柱の中には流れはないわけだから、流体の方程式が成り立たなくても別に不都合はない。

[35] 天才的な洞察に満ちた本ではあるが、しかし、この章における「境界層」という語の使い方にはいささが疑問がないわけではない。ふつうの意味での「境界層」については、たとえば文献 [2] の第 15 章や、文献 [6] の p.169 以降を見よ。

[4] 種子田定俊. 画像から学ぶ流体力学. 朝倉書店, 1988.

[5] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁波と物性. ファインマン物理学 IV. 岩波書店, 1971.

[6] 神部勉, 石井克哉. 流体力学. 裳華房, 1995.

[7] 巽友正. 連続体の力学. 岩波基礎物理学シリーズ 2. 岩波書店, 1995.

[8] Landau and Lifshitz. 流体力学 2. 東京図書, 1971.

[9] 木田重雄. 流体方程式の解き方入門. 物理数学 One Point 11. 共立出版, 1994.

[10] 久保亮五. 大学演習 熱学・統計力学. 裳華房, 1961.

[11] 松信八十男. 変形と流れの力学. 基礎の物理 2. 朝倉書店, 1981.

[12] 田崎晴明. 熱力学 — 現代的な視点から. 新物理学シリーズ 32. 培風館, 2000.

[13] 青野修. 次元と次元解析. 物理学 One Point 16. 共立出版, 1982.

[14] 日本機械学会. 写真集 流れ. 丸善, 1984.

[15] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁気学. ファインマン物理学 III. 岩波書店, 1969.

[16] Glansdorff and Prigogine. 構造・安定性・ゆらぎ — その熱力学的理論, 第 1 章 保存則と釣合いの式. みすず書房, 1977.

[17] Donald A. McQuarrie. Statistical Mechanics, chapter 17, Continuum Mechanics. HarperCollins, 1976.

[18] E. Kreyszig. 線形代数とベクトル解析. 技術者のための高等数学 2. 培風館, 1987.

大学で物理学を学ぶ以上は、天才 Feynman の講義録を一度は必ず読むべきである。このプリントの主題である「場」という考え方は、電磁気学の講義と並行する形で、文献 [15] の第 2・3・4・12 章で説明されている。

流体力学の参考書としては、文献 [6] か [7] が手頃だろう。なお、巽友正の「流体力学」[2] は、大学院で流体をやるならぜひ買っておきたい。文献 [3] は名著ではあるが、高価でかつ未完であるから、特に急いで購入する必要はないだろう。

このプリントは 1997 年に執筆した原型を何度か改訂したものである。当初の原型を執筆するにあたって、主に [16, 17] を参考にした。

補遺

A ギリシャ文字

A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	e-psilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta

I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	o-micron
Π	π	pi

R	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	u-psilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi (khi)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	o-mega

B 球面のパラメータ表示

半径 a の球面をパラメータ表示し、その上の面積要素 $\mathbf{n}dS$ を求めよう (ここで $\mathbf{n}$ は単位法線ベクトル)。それには、球面上の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を 2 つのパラメータであらわし、パラメータを微小に変化させてできる平行四辺形を考えればよい。

物理学では、ふつう (θ, ϕ) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a\sin\theta\,\cos\phi,\ a\sin\theta\,\sin\phi,\ a\cos\theta) \tag{B.1}$$

とあらわす。式 (B.1) は、$\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ を用いて

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{e}_r = (\sin\theta\,\cos\phi,\ \sin\theta\,\sin\phi,\ \cos\theta)$$

と書くこともできる。微小な平行四辺形の辺に相当するベクトルは $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\Delta\theta$ および $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\Delta\phi$ であり、式 (B.1) を用いて具体的に計算すると

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = (a\cos\theta\,\cos\phi,\ a\cos\theta\,\sin\phi,\ -a\sin\theta)$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = (-a\sin\theta\,\sin\phi,\ a\sin\theta\,\cos\phi,\ 0)$$

したがって

$$\mathbf{n}dS = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}d\theta\right) \times \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi\right) = \cdots = \mathbf{e}_r\, a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{B.2}$$

を得る[36]。

場合によっては、式 (B.1) とは異なる表し方を用いることもある。たとえば地球物理では通常の緯度や経度に合わせた変数を用いるほうが好都合だろう。クライツィグ [18, p.182] は、(u, v) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a\cos v\,\cos u,\ a\cos v\,\sin u,\ a\sin v) \tag{B.3}$$

とあらわしている。さきほどと同様に $\mathbf{n}dS$ を求めると、結果は

$$\mathbf{n}dS = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}du\right) \times \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}dv\right) = \cdots = \mathbf{e}_r\, a^2\cos v\, du\, dv \tag{B.4}$$

となる。

C Gaußの誤差関数

Gaußの誤差関数を

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds, \qquad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-s^2}ds \tag{C.1}$$

のような積分で定義する[37]。これらの関数の挙動を知るには、GNUPLOT を起動して

```
plot erf(x), erfc(x)
```

などと入力してグラフを描けばよい。範囲やタイトルの自動設定が気に入らない場合は

```
plot [0:2.5] [0:1.2] erf(x) title "Gauss' error function"
```

のようにして自分の好きなように指定する。

[36] 外積の図形的な意味を思い出してほしい: 平行四辺形の 2 つの辺の外積は、面ベクトル (面積と法線を示すベクトル) を与える。
[37] 本によって定義が違う場合があるので注意すること。