流体の数学

鳥取大 (工) 応用数理工学科 大西研究室

数理工学演習 I/II (2002-10-09 版)

概 要

このプリントは、3 回生の科目「数理工学演習 I/II」のための課題である。第 1 週および第 2 週に第 **I** 部の演習をおこない、第 **II** 部の演習を第 3 週および第 4 週におこなう。

まず、演習に来る前に、第 1 章の演習問題を予習しておいてほしい。演習の最初の週に、これらの問題について小テストをおこなったあと、黒板で説明してもらう。第 2 章「『場』というもの」はレポート課題で、これは 2 週目の冒頭に提出する。

最初の週の終了時に、第 3 章の課題分担を決めておく (あまり細分化しないように)。2 週目には、この分担に従い、課題の内容を発表する。第 4 章はレポート課題で、演習終了後 2 週間をめどに提出する。

第 **II** 部も、第 **I** 部とほぼ同じように進める予定である。したがって、後期の最初の週には、第 5 章を予習してこなければならない。ただし、最後の週の課題は、第 7 章のすべてではなく、適宜選択してもらうことになる。最後の第 8 章はレポート課題である。

なお、このプリントの訂正や補足説明を `http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/` に掲載するので、必要に応じて参照すること。

目 次

第 I 部
流体の方程式を導く

1　流体の方程式を導くための準備

1.1　面積分と体積積分

(1) 領域 $V_1 = \{\ (x, y, z)\ |\ 0 < x < L_1,\ 0 < y < L_2,\ 0 < z < L_3\ \}$ において、温度分布が

$$T = T_0 + T_0' z + \frac{1}{2} T_0'' z^2 \quad (T_0,\, T_0',\, T_0'' \text{ は定数})$$

のようになっているとする。(i) 領域 V_1 を図示し、微小体積に分割せよ。(ii) 微小体積 ΔV に含まれる熱エネルギー[1]ΔQ を求めよ。物質の密度 ρ および質量あたりの比熱 c は既知の定数とする。(iii) 領域 V_1 の

[1]この用語は本当は正しくない — 本当は「内部エネルギー」や「エンタルピー」について論じるほうが正しい。しかし、ここでは「熱」についての直観的イメージを優先して、あえて「熱エネルギー」という昔ながらの用語を用いる。

なかに存在する熱エネルギーの総量 Q を求めよ。

ヒント： もしも物体全体 (体積 V) の温度 T が均一ならば、熱エネルギー Q は、熱容量 $C = \rho c V$ を用いて $Q = CT = \rho c T V$ により求められる。この式を微小体積 ΔV に応用する。

(2) 領域 $V_2 = \{\ (x,y,z) \mid -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < z < h\ \}$ のなかに、

$$\rho = \rho_0\, e^{-(x^2+y^2)/a^2} \quad (\text{ただし } \rho_0,\ a \text{ は定数})$$

のような電荷密度分布が存在している。領域 V_2 のなかの電荷の総量 q_2 を求めよ。

(3) 電磁気学における**Gaußの法則**[1, p.89] によれば、領域 V のなかに存在する電荷の量は、領域 V の 表面 S を貫いて内側から外側へ向かう電気力線の総量に等しい[2]。

領域 $V_3 = \{\ (x,y,z) \mid -a < x < a,\ -b < y < b,\ -c < z < c\ \}$ において 電束密度場 $\mathbf{D}$ が

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (0,0,+\epsilon_0 E_0) & (z > 0 \text{ において}) \\ (0,0,-\epsilon_0 E_0) & (z < 0 \text{ において}) \end{cases}$$

のように与えられているとする。 (i) V_3 の表面を、6 つの面の和としてあらわし、それぞれの面の外向き単位法線ベクトルを示せ。(ii) それぞれの面について、面をつらぬく電気力線の量を求めよ。(iii) V_3 に含まれる電荷の総量 q_3 を求めよ。

(4) 領域 $V_4 = \left\{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < a^2\ \right\}$ において

$$\mathbf{D} = (Kx, Ky, Kz)$$

のような電束密度場が存在している。 (i) 領域 V_4 の表面を 微小面積 ΔS に分割し、法線ベクトル $\mathbf{n}$ とともに示せ (補遺 B を参照)。(ii) それぞれの微小面積 ΔS をつらぬく電気力線の量を求めよ。(iii) 領域 V_4 に含まれる電荷の総量 q_4 を求めよ。

1.2 Gaußの定理

ベクトル解析でいう Gaußの法則 (**Gaußの定理**) は、

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, dV = \int_{V\text{ の境界}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{1.1}$$

という恒等式である[3]。電磁気学における “Gaußの法則” とは、関係はあるけれども概念的には別のものだから、混同してはいけない。

(1) ベクトル場 $\mathbf{f}$ および 領域 V を 具体的に

$$\mathbf{f} = \left(1 - z^2,\ x+y,\ 2z\right), \quad V = \left\{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < a^2\ \right\}$$

として、式 (1.1) の左辺の値を求めよ。

(2) 上記の $\mathbf{f}$ および V に対し、式 (1.1) の右辺を正直に計算し、左辺の計算結果と一致することを確認せよ。

[2] 面積あたりの電気力線の密度をあらわす場が電束密度場 $\mathbf{D}$ であり、真空中では $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ で与えられる。物質中 (すなわち直接考慮しない電子や陽子がたくさんある場合) の $\mathbf{D}$ と $\mathbf{E}$ の関係は一般には複雑であるが、$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ と考えてよい場合が多い。

[3] 文献 [2, §60] に次のような言葉がある: “「公式」などと一口に言うが、数学に於ける公式は主に「恒等式」であり、物理学に於ける公式は、「方程式」である。...”

1.3 添字記法

ベクトル解析では、

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \partial_j a_j$$

のように、同じことをあらわすのにも 場合に応じて さまざまな記法を用いる。ここで、最後にでてきた

$$\partial_j a_j$$

のような書き方を、このプリントでは添字記法とよぶことにする[4]。本当は $\sum_{j=x,y,z} \partial_j a_j$ のように書くべきなのだが、添字記法では ふつう $\sum$ を省略し、そのかわり「添字が 2 つ重複していたら $\sum$ を補って考える」という約束になっている (**Einstein** の規約)。

(1) 次のような関係式があるとする。 (i) まず成分で表記せよ。 (ii) 添字記法による略記を示せ。
 (a) $\mathbf{x} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
 (b) $\mathbf{h} = \mathbf{f}\cdot\nabla\mathbf{g}$

(2) 添字記法を用いて、次の式が成り立つことをなるべく簡潔に示せ:

$$\nabla\cdot(f\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla f + f\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{1.2}$$

1.4 保存則の微分形: バランスの式

電磁気学や流体力学では、しばしば、

積分形の方程式 $\Leftrightarrow$ 微分形の方程式

という書き換えが必要になる。具体例をひとつ挙げると、たとえば**Gauß**の法則の積分形は

$$\int_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \rho\, dV \tag{1.3}$$

で、これを微分形に直すと

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \tag{1.4}$$

となる。積分形 (1.3) から微分形 (1.4) への変形には、Gaußの定理 (1.1) を用いる[5]。

(1) 物質の質量分布は、密度 $\rho = \rho(x,y,z,t)$ であらわすことができる。質量保存則を積分形で書いた式

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_S \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS \tag{1.5}$$

を、微分形に直せ。なお、$\mathbf{u}$ は流れの速度をあらわす。

---

[4]人によっては、添字記法のことを「テンソル」と言うが、これは少々奇妙な語法である。現代数学でテンソルと言う場合、添字記法で書かれるとは限らず、むしろ直積 (テンソル積) $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ を用いて書くことが多い [3, §11]。また、物理でいうテンソルでは、いわゆる変換則 (座標変換と成分の変換がどう連動するか) が重要である [4]。いずれにしても添字はテンソルにとって本質的ではない。

[5]さっき「Gaußの定理と Gaußの法則とは概念的に別のものだから混同してはいけない」と書いてあったのを思い出そう。

(2) 水中にゾウリムシか何かが多数いるとして、その数密度を $\phi = \phi(x, y, z, t)$ と書く。場所ごとの増殖を示す項を σ とすると、ゾウリムシの数密度に関する積分形の式

$$\frac{d}{dt}\int_V \phi\, dV = \int_V \sigma\, dV - \int_S \phi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS \tag{1.6}$$

が得られる。 (i) この式を微分形に直せ。(ii) 前問 (1) の結果と比較せよ。

(3) 流体または固体のなかのエネルギーの分布を考えよう。流体の速度がじゅうぶんに遅く、また外部からの圧縮や化学反応などによる発熱や吸熱もない場合、エネルギー保存則は、いわゆる熱量保存則

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n} dS \qquad \left(\text{ただし } Q = \int_V \boxed{} dV\right) \tag{1.7}$$

に帰着する[6]。ここで Q は V のなかの熱量、$\mathbf{J}$ は 面積あたりの熱の移動を示すベクトルである (§3.3 でよりくわしく考察する)。式 (1.7) を、微分形に書き直せ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \boxed{} = 0 \tag{1.8}$$

一般に、何らかの量 (物質・エネルギー・電荷など) が空間に分布している場合、その分布の時間変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t}[\text{分布密度}] + \mathrm{div}\,[\text{流束項}] = [\text{生成項}] \tag{1.9}$$

という形の式に従う [6, §1]。式 (1.9) をバランスの式あるいは広義の保存則という[7]。

1.5 運動量保存則

流体の運動方程式は、空間に連続的に分布した運動量密度 $\rho\mathbf{u}$ を扱う。しかし、いきなり連続的な分布 (≒ 無限個の点) を考えるのは難しいので、準備として、2 質点系の復習をしよう。

(1) 質点 A と質点 B が力を及ぼしあう場合を考える。 (i) Newton の運動方程式を

$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$$
$$\frac{d}{dt}\Pi_{\mathrm{B}} = \cdots$$

の形で書き直せ。(ii) 運動量 $\Pi_{\mathrm{A}}, \Pi_{\mathrm{B}}$ を銀行の口座残高にたとえるとすると、上記の方程式の各項は何にたとえられるか? (iii) 系全体の運動量の合計が一定に保たれることを説明せよ。

(2) 機関車を含めて 3 両連結で走る列車の運動方程式を上記のような形で記し、考察せよ。 特に、発車あるいは停車の場合を考え、運動量の変化について考察せよ。

2 「場」というもの

数学的には、“空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数” あるいは “空間座標 $\mathbf{r}$ と 時刻 t の関数” のことを場(field) と称する。いままで、温度分布・電荷分布などという書き方をしてきたが、これらは「温度場」「電荷密度場」などと呼ぶべきものである。別の例をあげると、磁力線が空間に分布している様子は磁場(あるいは “磁束密度場”) として記述される。流体力学では、空間の各点ごとの速度を示す速度場が重要な概念である。

[6]逆に、気体力学で考えるような速い流れでは、熱だけを切り離して考えることにはあまり意味がなく、内部エネルギーと運動エネルギーを一緒にしてエネルギー方程式を考える必要がある。エネルギー方程式の具体的な形については参考文献 [5, p.59] を見よ。

[7]生成項がゼロの場合が狭義の保存則である。式 (1.5) や式 (1.7) が該当する。

(1) 場にはベクトル場・スカラー場などがある。これらの違いは何か?

(2) 新聞を買って天気図を切り抜き、レポート用紙に貼りつけて、次の点について説明せよ:

- どのようなベクトル場やスカラー場が用いられているか?
- 圧力の極大値や極小値はどこにあるか?
- 鳥取における風向や風速はどう読み取れるか?

(3) コンピュータによるグラフ作成ツール (`GNUPLOT` や `Ngraph` など) を用いて[8]、以下のスカラー場を図示せよ:

- $\rho = \rho(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
- $s = s(x, y) = \exp\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

なお、それぞれについて、鳥瞰図と等値線図の両方を提出すること (図 1 を見よ)。また、等高線がじゅうぶん滑らかになるように、サンプリング数 (`GNUPLOT` で言えば `isosamples`) を適切な値に設定すること。

(4) 同じく、コンピュータによるグラフ作成ツールを用いて、ベクトル場

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = (A \sin x \, \cos y, \; B \cos x \, \sin y, \; 0) \qquad [A, B \text{ は定数}] \tag{2.1}$$

を図示せよ。ここで、A および B の値は、次の 4 とおりとする:

- $A = 0.5, \;\; B = -0.5$
- $A = 0.8, \;\; B = -0.2$
- $A = 0.8, \;\; B = 0.5$
- $A = -0.8, \;\; B = 0.8$

結果を図 2 に示してあるので、参考にすること。

ベクトル場は、図 2 や図 3 のように、小さな矢印をたくさん描いてあらわす。矢印があまり長いと見にくいので、適当に縮めて描くこと (そもそも矢印があらわすのは「一点におけるベクトル値」なので、概念的には、矢印の占める大きさは無限小でなければならない)。

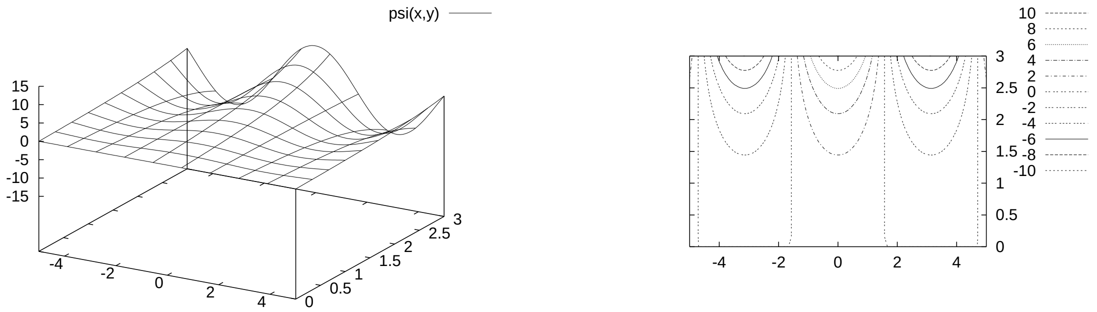

図 1: スカラー場 $\psi = \cos x \sinh y$ のグラフ: 左は鳥瞰図、右は等値線図

[8]資料を `http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/` に用意してあるので参考にすること。

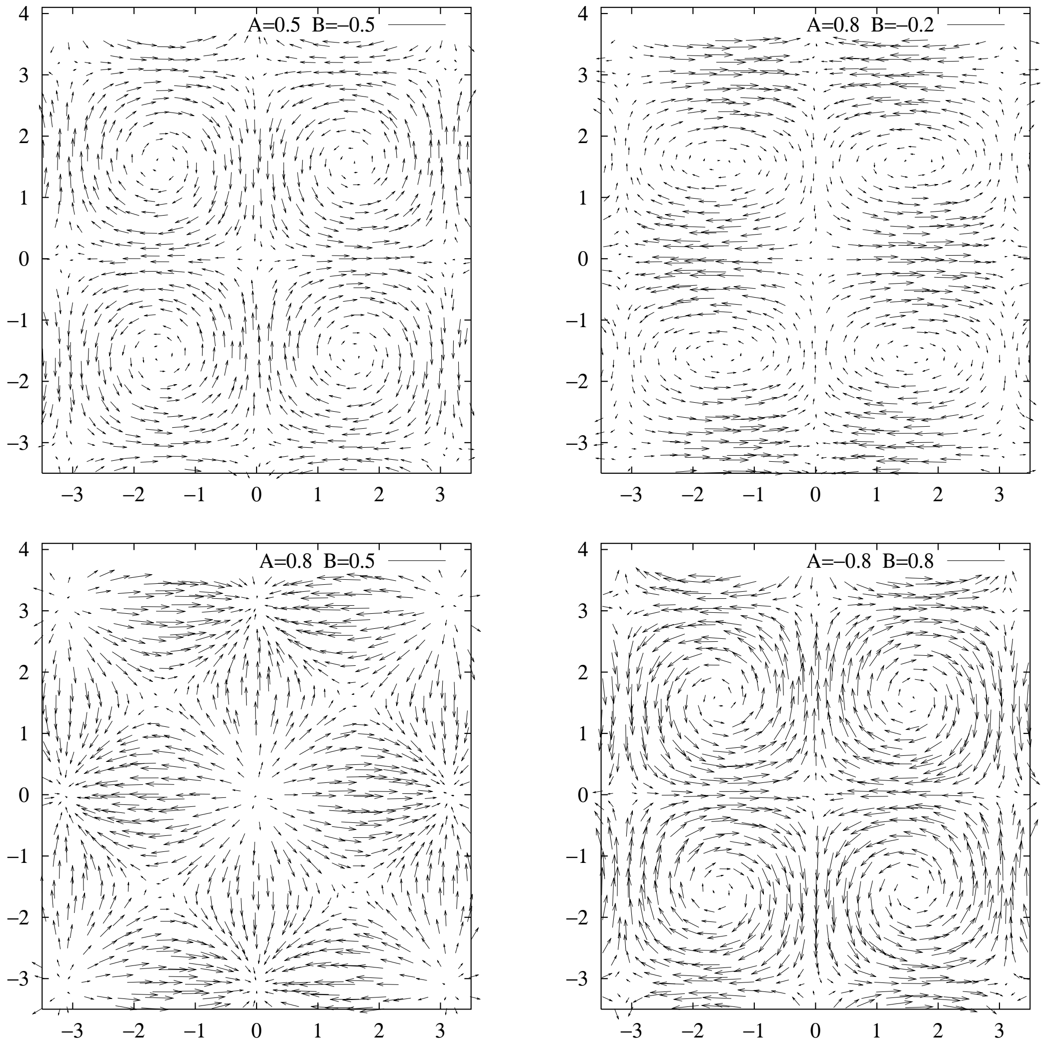

図 2: 式 (2.1) であらわされる流れ場の例

3 流体力学の方程式

今までの予備知識をもとに、流体における質量保存則 (連続の式)、および広義の運動量保存則 (**Euler** の運動方程式) をあらわす式を導く。関連するテーマとして、熱伝導方程式についても考察する。

なお、演習が終わったあと、指定された期日までに、§3.6 を (流れ場の図示まで含めて) レポートにまとめ、第 4 章のレポートと一緒に提出すること。

3.1 流体における質量保存則

式 (2.1) で与えられる流れ場を考える。ここで「場」という言葉が示すように $\mathbf{u}$ は (x, y, z) の関数であり、場所に応じて異なる速度を表している (単一の値ではない)。定数 A, B を適当に決めて速度場を描くと、たとえば図 2 のようになる。

(1) 図 2 に示してある 4 つの流れ場のうち、非圧縮流体[9]では実現できない流れが 2 つある。どれが実現可能でどれが実現不可能か、直感的に考察せよ。

(2) 式 (2.1) の流れが非圧縮流体の流れとして実現できるためには、A と B は ある条件式を満たさなければならない。この条件式を、次のような手順で求めよ。

- 一般論として、流体の質量密度を ρ とし、質量保存則 (1.5) を微分形で書きなおす。
- 非圧縮流体では、同一の流体要素の密度は時間変化しないので

$$\rho(t+\Delta t, \mathbf{r}+\mathbf{u}\Delta t) = \rho(t, \mathbf{r}) \tag{3.1}$$

が成り立つ[10]。このことから、$\mathbf{u}$ に関する次の条件式を導く:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{3.2}$$

- 式 (2.1) と式 (3.2) を用いて、A と B が満たすべき条件式を求める。

(3) 図 2 に示されている 4 とおりの流れ場について、$\operatorname{div}\mathbf{u}$ を計算し、非圧縮流体の流れとしての実現可能性について考えよ。 (i) $\operatorname{div}\mathbf{u} > 0$ となる領域と $\operatorname{div}\mathbf{u} < 0$ となる領域を色分けして図示せよ。(ii) それぞれの領域内に微小な領域を設定し、微小領域からの流体の出入りを考察せよ。

3.2 流体要素と物質微分

ある一定量の流体が、$0 < x < +\infty$ の範囲の空間を占めている。流体は連続体であるが、これを細分化して N 個の粒子 (流体要素) と見なし (もちろん $N \to \infty$)、その位置や速度と流体の密度との関係を考えよう。

(1) 端から順番に粒子に番号 ($j = 0, 1, \ldots, N-1$) をつけ、j 番目の粒子の位置 x_j が

$$x_j = \frac{j\lambda}{N-j}(1+\epsilon\sin\omega t) \tag{3.3}$$

で与えられるとする。 横軸に x, 縦軸に t をとり、粒子の運動を図示せよ。

(2) 粒子番号を連続体に適用したものを物質座標と称し、ここでは $a = j/N$ で定義する。流体要素の位置 x および 速度 u を、時刻 t と物質座標 a の関数として求めよ。[ヒント: $N \to \infty$ の極限で $x_j \to x$, また $j \to Na$]

(3) 流体の密度 ρ について考えよう。流体の全質量を m とすると、粒子 1 個あたりの質量は $\mu = m/N$ である。したがって、$\Delta V = S\Delta x$ の空間範囲に k 個の粒子が入っていたら、そこでの密度は $\rho = k\tilde{\mu}/\Delta x$ である (ただし $\tilde{\mu} = \mu/S$ と置いた)。式 (3.3) に基づいて、具体的に

$$\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{k\tilde{\mu}}{x_{j+k} - x_j}$$

を計算し、ρ を a と t であらわせ。[ヒント: まず分子と分母を別々に計算するほうが面倒が少ない。]

(4) 上で求めた密度 $\rho = \rho(a, t)$ について、a を固定した時間微分

$$\frac{D\rho}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_a \tag{3.4}$$

[9] 圧縮や膨張を許さない流体のこと。同じ意味で「非膨張流体」とも言えるはずだが、ふつうは「非圧縮流体」と言う。

[10] 必ずしも $\rho = \text{const.}$ である必要はない。たとえば、油と水から成る系を考えてみよ。

を求めよ。なお、

$$\frac{D\cdot}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial\cdot}{\partial t}\right)_a \tag{3.5}$$

で定義される D/Dt のことを物質微分あるいは**Lagrange** 微分と称し、『流体要素の立場から見た時間微分』をあらわす[11]。

(5) (i) 上記の結果に $a = a(x,t)$ を代入して整理し、ρ を x と t であらわせ。(ii) $\rho = \rho(x,t)$ の時間微分を求めよ。(iii) 公式

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho(t+\Delta t, \mathbf{r}+\mathbf{u}\Delta t) - \rho(t,\mathbf{r})}{\Delta t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho \tag{3.6}$$

を用いて $D\rho/Dt$ を計算すると、式 (3.4) と同じ結果が得られることを確認せよ。

(6) (i) 流体の密度 ρ および 速度 u が、1 次元の連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

を満たすことを示せ。(ii) 式 (3.7) の 3 次元版を書き下せ。

3.3 熱伝導方程式

いきなり流体の運動方程式を考えるのは難しいので、より易しい問題として、熱の移動を記述する方程式[12]を考えることにする。

(1) 熱の移動には「伝導」「対流」「放射」の 3 つがある。それぞれについて、いくつか具体例を挙げて説明せよ。ただし、自分で体験したことのある例に限る (本で読んだだけの話ではだめ)。

(2) 次の手順に従い、熱伝導方程式

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\triangle T \tag{3.8}$$

を導出せよ。なお、左辺の D/Dt は 式 (3.5) で定義される**Lagrange** 微分である。具体的に Lagrange 微分を計算するには、公式 (3.6) を用いればよい。

- 熱量保存則 (1.7) の微分形から出発する。
- 熱の移動 $\mathbf{J}$ を、 $\mathbf{J} = \mathbf{q} + \mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \mathbf{J}_{\mathrm{r}}$ のように、3 つの部分に分けて考える。
  - 熱伝導は**Fourier** の熱伝導の法則に従う:

$$\mathbf{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,T \tag{3.9}$$

    つまり、熱流 $\mathbf{q}$ は 距離あたりの温度差 (温度勾配) に比例する。ここで λ は熱伝導率で、物質の種類によって決まる定数だと考えてよい[13]。
  - 熱などが “流れに乗って”(すなわち物質の移動に伴って) 運ばれることを、移流(あるいは対流) という。流体の速度場を $\mathbf{u}$ とし、これによる熱の移流を $\mathbf{J}_{\mathrm{c}}$ と書くと、次の関係式が成り立つ:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{c}} = \boxed{}\,\mathbf{u}$$

[11] 物質微分は、式 (3.5) が定義であり、式 (3.6) はそこから導かれるものと考えるほうが、逆の考え方よりも明解であろう。

[12] 熱の問題だからといって熱力学の教科書を開いても、ふつうは無駄である。むしろ「輸送現象」とか「移動論」とか書いてある本を探すのがよい。

[13] 一般には λ は温度の関数だが、温度の変化する幅が小さければ λ は定数と見なして良い。

ヒント: 時間 Δt のあいだに面 ΔS を通過する物質の体積をまず求め、これを熱量に換算する。

– 放射による熱の移動 $\mathbf{J}_{\mathrm{r}}$ は、とりあえず無視する (ゼロと置く)。

- 以上の結果を総合すると、流体中の熱伝導方程式が

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\,(T\mathbf{u}) = \kappa \triangle T \tag{3.10}$$

の形で得られる (ただし $\rho,\ c,\ \lambda$ はいずれも定数だとする)。あとは、非圧縮流体に関する連続の式 (3.2) を用いて方程式 (3.10) を書き直すと、方程式 (3.8) が得られる。

(3) 流れがない場合 (特に固体中の場合) の熱伝導方程式はどうなるか?

(4) SI 単位系による物理量 X の単位を $[X]$ で示す。係数 κ の単位 $[\kappa]$ を求めよ[14]。

3.4 非粘性流体の運動方程式

ようやく流体の運動方程式を導く準備ができた。ただし、簡単化のため、1 次元で考えることにする。
以下の方針に従って 2 つの異なる方法で流体の運動方程式を導き、両者が同じ結果になることを確認せよ。

(1) まず、§3.2 のような、流体要素に着目する方法 (**Lagrange** 描像) で考える。

- 流体要素の運動方程式を

$$\mu \ddot{x}_i = F_{i-1\to i} + F_{i+1\to i} + \tilde{f}_i \tag{3.11}$$

とする。ここで $F_{i\to j}$ は流体要素どうしの間にはたらく力、$\tilde{f}_i$ は 外部から流体要素に直接はたらく力をあらわす。

- 流体要素 $i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ i+k-1$ を足し合わせた運動方程式を求める:

$$\mu \frac{d^2}{dt^2}\,(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k-1}) = \boxed{} + (\tilde{f}_i + \tilde{f}_{i+1} + \cdots + \tilde{f}_{i+k-1}) \tag{3.12}$$

- 密度が $\rho = \tilde{\mu}k/\xi$ (ただし $\xi = x_{i+k} - x_i$) で与えられることを用いると

$$[\text{式 (3.12) の左辺}] = \rho S \xi \frac{Du}{Dt}$$

ここで、時間微分に Lagrange 微分 (3.5) を用いることに注意し、その理由を説明せよ。

- 運動方程式 (3.11) の右辺は要素 1 個あたりの力なので、「面積あたり」または「体積あたり」に直す。まず、流体要素のあいだに働く力 (応力) を、面積あたりで表示する必要がある。今の場合、応力としては圧力だけを考えればよい。そこで、圧力 $p = p(x)$ を $F_{i-1\to i}/S = p(x_i)$ によって定義する。さらに、外部から働く力を、体積あたりの力 f を用いて書き直し、次の式を得る:

$$[\text{式 (3.12) の右辺}] = S\big\{\ p(x) - p(x+\xi) + \xi f\ \big\}$$

- 流体要素の間隔は非常に小さいので、ξ を微小と見なすと、式 (3.12) は (1 次元)**Euler** 方程式になる:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f \tag{3.13}$$

[14] この結果を、あとで §7.8 で利用する。

(2) こんどは、空間に固定された領域 $V = \{x|\, x_1 < x < x_2\}$ に着目し、速度場 $u = u(x,t)$ を用いて 運動量 ρu に関するバランスの式を書き下す (**Euler** 描像)。

- 時刻 t において領域 V に含まれる運動量を $\Pi(V,t)$ とする:

$$\Pi(V,t) = \int_V \rho(x,t)u(x,t)\,dV = \int_{x_1}^{x_2} \rho u\, S dx$$

- 運動量 $\Pi(V,t)$ は、力によって時間変化する (→ §1.5 を見よ)。
- さらに、境界面をとおして流体が出入りすることによる運動量の増減を考えなければならない。出入りする流体の体積が $Su\Delta t$ であることを考えると、運動量に関するバランスの式が

$$\Pi(V,t+\Delta t) = \Pi(V,t) + \left\{ \boxed{}\Big|_{x_1} - \boxed{}\Big|_{x_2} \right\} S\Delta t + [\text{外力項}]$$

のような形で書ける。この方程式を微分形に書き直す:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p\right) = f \tag{3.14}$$

(3) 運動量のバランスの式 (3.14) をうまく変形すると 1 次元 Euler 方程式 (3.13) と同じになることを示せ。

ちなみに、3 次元の Euler 方程式は次のようになる:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{3.15}$$

なお、運動量のバランスの式 (3.14) の 3 次元版は、u^2 の部分が テンソル $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ になる[15]ので、少々やっかいである。そのため、運動量のバランスの式は、太字記号を用いずに添字記法で書くことが多い。具体的な形については、たとえば文献 [7, p.35] の式 (2.42) を見よ。

3.5 非粘性の 2 次元非圧縮流れ

せっかく運動方程式 (3.15) が得られたので、何か試しに解を求めてみることにしよう。話を簡単化するために、次のような仮定をおこなう:

- 流れは定常 ($\partial_t = 0$) で、かつ 2 次元的
- 流体の密度は一定 ($\rho = \text{const.}$)
- 外力は存在しない ($\mathbf{f} = 0$)

このとき、流れの支配方程式 [すなわち連続の式 (3.2) および運動方程式 (3.15)] は次のように書き直せる:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \tag{3.16}$$

$$\rho\left(u\partial_x + v\partial_y\right)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} p \tag{3.17}$$

[15] ベクトルの積には、内積 (スカラー積)・外積 (ベクトル積) のほかに、直積 (テンソル積) というものがあり、現代数学では ⊗ という記号であらわす。ただし、⊗ は しばしば省略される: つまり、$\mathbf{ab}$ と書いたら $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ のことで、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ のことではない。これが、内積の場合にドットの省略が許されない理由である。

(1) 方程式 (3.16) の一般解は

$$u = +\partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi \tag{3.18}$$

で与えられる[16]。式 (3.18) を方程式 (3.16) に代入し、たしかに解であることを確認せよ。

(2) 式 (3.18) を運動方程式 (3.17) に代入して整理すると

$$\begin{vmatrix} \partial_x \nabla^2 \psi & \partial_x \psi \\ \partial_y \nabla^2 \psi & \partial_y \psi \end{vmatrix} = 0$$

のようになることを示せ。さらに、この方程式の解は

$$\nabla^2 \psi = c_0 + c_1 \psi + c_2 \psi^2 + \cdots \tag{3.19}$$

によって得られることを示せ (代入して確認せよ)。

特に簡単な場合として、式 (3.19) の右辺の $\{c_j\}$ がすべてゼロである場合を考えると、結局、解くべき方程式は

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{3.20}$$

すなわち**Laplace** 方程式に帰着する。

3.6 円柱を過ぎる非粘性の流れ

非粘性の渦なし流れは、Laplace 方程式 (3.17) を用いて解析することができる[17]。試しに、速度 U の一様流のなかに置かれた 半径 $D/2$ の円柱のまわりの流れを求めてみよう。

(1) もし円柱がなければ $\mathbf{u} = (u, v) = (U, 0)$ すなわち $\psi = Uy$ である [式 (3.18) に代入し確認せよ]。円柱の影響を考慮するため、定数 U を $F = F(r)$ で置き換えて

$$\psi = Fy \qquad \Big(\text{ただし } F = F(r),\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\Big) \tag{3.21}$$

と置く。式 (3.21) を Laplace 方程式 (3.20) に代入して整理すると、F に関する 2 階の常微分方程式となることを示し[18]、その一般解を求めよ。

(2) 前問 (1) の結果において、境界条件 (円柱表面および無限遠での $\mathbf{u}$ の条件) を考慮して定数を定め、$\mathbf{u}$ を (x, y) であらわせ[19]。

(3) 求めた速度場 $\mathbf{u}$ を図示せよ (GNUPLOT などを用いて正確な図を作成する)。なお、$r < D/2$ の領域 (円柱の内部) は図から除くこと。

> 注意: ここで求めた解は、粘性の影響が無視できるという前提に基づいているが、この解は現実の実験 [9] とほとんど全く合わない。これは、流体の粘性が大きいためではない (たいていの場合、粘性そのものの値はむしろ小さい)。粘性の影響はむしろ間接的であって、直接には、境界層が剥離して非回転の仮定 (3.20) が破れることが本質的である。逆に言えば、境界層が剥離しないような物体では、粘性のない非回転流としての扱いは良い近似となりうる。

---

[16] 式 (3.18) は $\mathbf{u} = \mathrm{rot}(\psi \mathbf{e}_z)$ とも書ける。つまり、$\psi \mathbf{e}_z$ は $\mathbf{u}$ のベクトルポテンシャルである。

[17] もちろん、これは Euler 方程式 (3.17) の一般解というわけではなく、他にも解が存在する。また、2 次元で Laplace 方程式 (3.20) を解くには 複素関数論を利用するのが一般的である [8, §4]。しかし、ここではあえて複素関数論を使わない解法を試みることにする。

[18] もし常微分にならないならば、そもそも式 (3.21) のように置いたのが失敗ということになる。

[19] この問題の意図は、段階を追って論理的に式を導出することにある。したがって、「円柱を過ぎる流れは $f = U(z + 1/z)$」などという公式を教科書から天下り的に引っ張ってくるのは、ルール違反とする。

4 レポート課題: 「粘性のない流れ」

Feynmann 物理学[20]の「粘性のない流れ」(文献 [10] 第 19 章) を読み、他の文献 (文献 [11] の第 7 章など) も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。このプリントの第 3 章との関連を考えながら書くこと。

- 流体の運動方程式 (連続の式・Euler の運動方程式)
- 定常流における Bernoulli の定理 (導出・物理的意味・関連する実験事実)
- 渦度と循環 (円柱を過ぎる流れ・Helmholtz の渦定理・渦輪の発生と運動)

このレポートと一緒に、§3.6 のレポートも忘れずに提出せよ。

第 II 部
流体の運動を解析する

5 ベクトル解析の復習

5.1 ベクトル場の微分に関する公式

(1) ベクトル場 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ が

$$\mathbf{p} = (x + 2y, xy, 1), \qquad \mathbf{q} = (x^2 + 3y^2, xyz, 0)$$

のように与えられている。このとき、$\mathbf{p} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{q}$ および $\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{q}$ を求めよ。

(2) ベクトル場 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して $\mathrm{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を計算せよ。結果はなるべく整理した形で示すこと。(整理すると、div を含む形で きれいにまとめられる。)

(3) (i) スカラー場 f に対して

$$f\,\mathrm{grad}\,f = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left(f^2\right)$$

が成り立つことを示せ。(ii) この結果を、ベクトル場 $\mathbf{f}$ に対して拡張せよ。

ヒント: $\mathbf{f} \cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{f}$ と $\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left(\mathbf{f}^2\right)$ は 一般には等しくないが、両者の差を計算してみると、$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ を用いて きれいな形にまとめられることが分かる。

5.2 渦の流れ

典型的な渦流れは、おおよそ 次のような速度分布を示す (図 3 を参照):

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = \begin{cases} (-by, bx, 0) & (\sqrt{x^2+y^2} \le a) \\ \left(-\dfrac{ba^2 y}{x^2+y^2},\ +\dfrac{ba^2 x}{x^2+y^2},\ 0 \right) & (\sqrt{x^2+y^2} > a) \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで a, b は定数である。式 (5.1) であらわされる渦のことを**Rankine 渦**という [11, p.18]。

(1) (i) Rankine 渦 (5.1) において、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を計算せよ。(ii) 渦度場 $\boldsymbol{\omega}$ を図示せよ[21]。

[20] 誰かが勝手に持ち去っていない限り、4 階の演習室にあるはずである。
[21] 本当は 3 次元で考えるべきなのだけれども、今の場合、2 次元のスカラー場のように図示してかまわない。

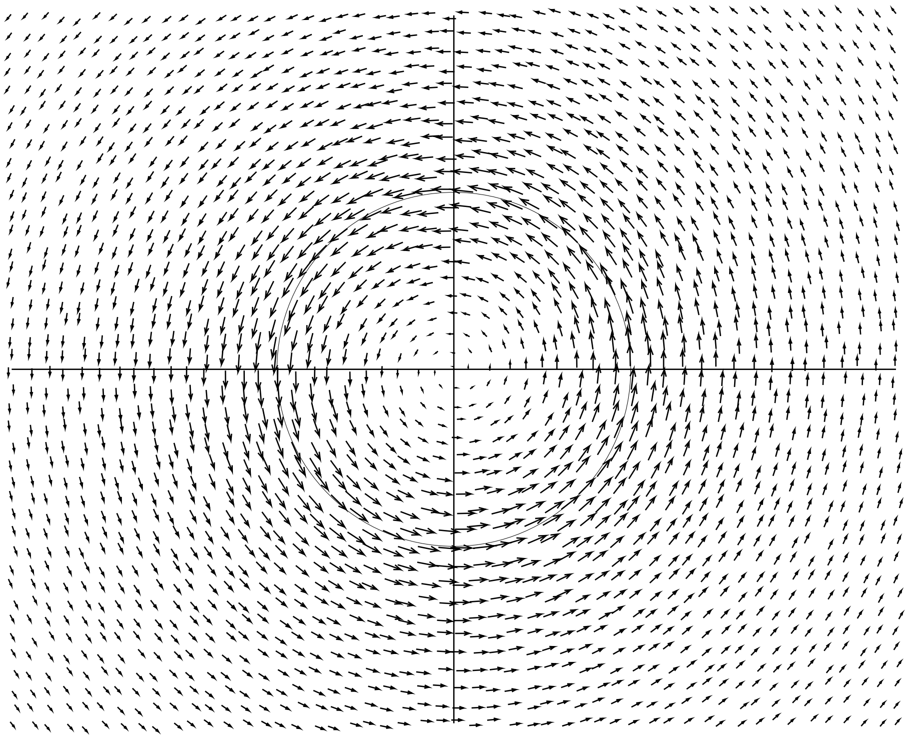

図 3: Rankine 渦による速度場 (5.1) の様子

(2) 回転流れを特徴づける量として循環という量があり、これは閉曲線にそって

$$\Gamma[C] = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

を計算することにより求められる。具体例として、次の閉曲線に関する循環 Γ を求めよ。

(a) (x, y)-平面上の、原点を中心とする半径 c の円周 (注意: 場合分けが必要!)

(b) $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (0,a,0) \to (0,0,0)$ のような三角形

(c) $(0,0,0) \to (a,0,0) \to (a,a,0) \to (0,a,0) \to (0,0,0)$ のような四角形

(3) ベクトル解析における**Stokes**の定理を用いて 渦度から循環を求めることができる。この方法を用いて 前問の 3 つの場合における循環を計算し、結果が一致することを確認せよ。

注意: 式 (5.1) のような渦 (**Rankine** 渦) において、$|\mathbf{r}|$ が大きいところでは $\omega = 0$ となる。その意味で、遠方での流れは「非回転流れ」である。渦度がゼロなので「渦なし」とも言う。しかし、確かに渦度はゼロだけれども、速度場を見ると渦巻き状なのだから、「渦なし」と言われても納得しにくいかもしれない。これは、要するに「渦度」という名前が誤解のもとなのである。渦度というのは、流体要素の自転を示す量であって、渦巻き状の流れ (いわば公転運動) を示すものではない。局所的な渦度の有無と 全体として渦巻き的な流れがあるかどうかは、別の問題である (もちろん関係はあるけれども)。

6 変数分離法

偏微分方程式を解くための常套手段である変数分離法について復習しておく。

(1) 1 次元の音波を記述する方程式 (7.18) の解を、変数分離法により求めよ。なお、境界条件は自分で適当に設定すること (無限領域でも有限領域でも どちらでもいいから、自分の好きなほうを採用せよ)。

(2) 1 次元の熱伝導方程式 (7.28) において、$T = T_0 + \theta$ (ここで $T_0 = \mathrm{const.}$) と置き、境界条件を $\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\ell} = 0$ とする。変数分離法を用いて一般解を求めよ。

(3) 前問 (2) で、初期条件を

$$\theta|_{t=0} = F(x) = 0.8 \sin \frac{\pi x}{\ell} + 0.4 \sin \frac{2\pi x}{\ell} - 0.2 \sin \frac{3\pi x}{\ell}$$

とした場合の解を求め、時間の経過とともに波形が変化していく様子を図示せよ (GNUPLOT を用いる)。

7 流体力学の方程式を解く

この章では、各グループごとに、3 つの課題について発表してもらう。

- 問題 7.1(渦度方程式) および問題 7.12(円柱を過ぎる流れ) を、必修課題とする。
- それ以外の問題から、どれか 1 つを選択する。ただし、他のグループが既に発表した問題は選択できない。

誰がどの問題のどの部分について発表するか、あらかじめ分担を決めて申告しておくこと。また、図示が必要な問題については、事前にGNUPLOT などで正確な図を作成しておき、コピーして配布するようにする。

発表には時間制限を設ける。必修課題は各 45 分以内、選択課題は 60 分以内に説明を完了させること (ただし、10 月中に限り、それぞれ 15 分の延長を認める)。制限時間以内に発表が完了しない者については、場合に応じて補講またはレポート提出を指示する。

選択課題については、発表が終わったあと、指定された期日までにレポートを作成して提出すること。(基本的に、第 8 章のレポートと一緒に提出してもらう予定である。)

7.1 渦度方程式

流体の運動方程式 (Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式) を変形し、渦度方程式を導く。簡単化のため、流体の密度 ρ は一定であるとする。

(1) 流体の粘性を無視し、流れは**Euler** 方程式

$$\mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0 \tag{7.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\,\mathrm{grad}\, p + \mathbf{f} \tag{7.2}$$

に従うものとする。外力は重力だけだとすれば $\mathbf{f} = (0, 0, -\rho g)$ である。
下記の方針に従い、Euler 方程式を式変形して渦度方程式を導け。

- 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\, \mathbf{u}$ を用いて、Euler 方程式 (7.2) の左辺を次のように書き直す:

$$[7.2 \text{ の左辺}] = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{grad} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right\} \tag{7.3}$$

- 式 (7.3) を Euler 方程式 (7.2) に代入して整理し、圧力 p を消去することにより、渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{7.4}$$

を導出する。

(2) 粘性を考慮する場合、Euler 方程式 (7.2) の代わりに、**Navier-Stokes** 方程式

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{7.5}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = -\operatorname{grad}p + \mathbf{f} + \eta\triangle\mathbf{u} \tag{7.6}$$

を用いる必要がある (§7.7 を見よ)。Navier-Stokes 方程式から圧力 p を消去し、渦度拡散方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nu\triangle\boldsymbol{\omega} \tag{7.7}$$

を導出せよ。

(3) 渦度方程式 (7.4) あるいは渦度拡散方程式 (7.7) の一般解を求めるのは困難であるが、それでもいくつかの解が容易に求められる。特に

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi \tag{7.8}$$

のような流れでは $\boldsymbol{\omega} = 0$ (非回転流れ) であり、したがって式 (7.8) は渦度方程式 (7.4) の解のひとつであることを示せ (もちろん一般解ではない)。なお、Φ を 速度ポテンシャルと称する。

7.2 水の波

非回転流れ ($\boldsymbol{\omega} = 0$) は速度ポテンシャル Φ を用いて式 (7.8) のように表すことができる。水の波(水面重力波) に伴って生じる流れは非回転流れと見なせるから[22]、速度ポテンシャルを用いて簡単な考察をしてみよう。

(1) 非圧縮という条件から、Φ の満たすべき微分方程式を求めよ。

(2) 水底を $z = -h_0$, 水面を $z = 0$ 付近とする。 流れは (x, z) 面内に限られるものと仮定し、速度ベクトルを $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ とする。ここで $\Phi = F(x)G(z)$ と置き、解くべき式を 2 つの常微分方程式に分離せよ。

(3) (i) 分離定数を調整して、波長が λ になるようにせよ。(ii) 水底での境界条件を与え、解 Φ を求めよ[23]。

(4) 速度場を求めて図示し、その特徴を論じよ。特に、$\lambda \gg h_0$ (浅水波) および $\lambda \ll h_0$ (深水波) という両極端の場合について、水面での速度と水底での速度の違いを考察せよ [7, §7-3]。

- 水面の水だけが動き、水底の水は静止しているのは どちらの場合か?
- 水面の水の動きに連動して水底の水も一緒に根こそぎ動くのは、どちらの場合か?

7.3 浅水波

波長 λ に比べて 水深 h_0 が比較的浅い場合を考えよう。このような場合の水の波を浅水波と称する。浅水波では、水面から水底まで水があたかも一体となって動くかのように考えて良い。したがって、次のような近似が成り立つので、解析が簡単になる:

- 速度 u は z にはよらず、x と t だけの関数だと見なしてよい (もう少し正確に言うと、$|\partial_z u| \ll |\partial_x u|$ なので $\partial_z u = 0$ と近似できる)。
- 垂直方向の速度 w は小さい (u に比べて無視できる)。

---

[22] 粘性の影響は、通常、水底の境界に接する薄い層状領域 (境界層) にのみ現われ、それ以外の部分では ほぼ完全に無視できる。

[23] さらに解の時間発展を考察するには表面での境界条件が必要だが、一般的な場合を考察するのは少し難しいので省略し、浅水波の場合に限って §7.3 以降で考察する。

また、運動エネルギーが重力の位置エネルギーを超えてしまうほど大きな波は考えにくいので、

$$\frac{\rho}{2}|\mathbf{u}|^2 < \rho g h$$

が成り立つものとする[24]。このとき、波の伝わりかたについて もう少しくわしく調べてみよう。

(1) 水があるのは、z 方向に関して言えば水底 ($z = -h_0 = \mathrm{const.}$) から水面 ($z = \eta$) までである。また、計算の便宜上、$y = \pm b/2$ に側壁があるとしよう。
(i) 領域 $x_1 < x < x_2$ にある水の量を M とすると

$$M = \rho b \int_{x_1}^{x_2} (h_0 + \eta)\, dx \simeq \rho b h \Delta x \qquad (\text{ただし } h_0 + \eta = h, \quad x_2 - x_1 = \Delta x) \tag{7.9}$$

であることを示せ。(ii) 水量 M の時間変化を考えることによって、“質量保存” をあらわす式[25]を導け:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0. \tag{7.10}$$

(2) (i) Euler 方程式 (7.2) の z 成分を書き出し、浅水波近似および他の前提条件を考慮して方程式を簡単化する。これにより、圧力 p が

$$p = p_0 + \rho g(\eta - z) = p_0 + \rho g(h - h_0 - z) \tag{7.11}$$

で与えられることを示せ。(ii) Euler 方程式の x 成分を抜きだし、これに浅水波近似および式 (7.10), (7.11) を組み合わて、運動量保存の式を h と u で書きあらわせ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\boxed{} = 0 \tag{7.12}$$

(3) 方程式 (7.10) と (7.12) を連立させたもの[26]が、浅水波の時間発展を記述する方程式である。この連立方程式の解を求めれば、浅水波の挙動が分かる。
簡単な例題として、

$$h = h_0 + \epsilon\eta, \quad u = \epsilon v\,; \qquad |\epsilon| \ll 1 \tag{7.13}$$

のような微小振幅波について考えよう。ここで h_0 は定数である。

- 式 (7.13) を浅水波の方程式に代入し、ϵ が微小であることを用いて、方程式を線形化せよ。
- 解の形を

  $$\eta = \eta(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \xi = x - ct$$

  とおいて代入し、解くべき方程式を 行列の固有値問題に帰着させよ。
- 初期条件を適当に仮定して (たとえば $\eta|_{t=0} = \cos kx$)、解を具体的に求め、時空間における解の挙動を図示せよ。(たとえば、横軸に x, 縦軸に t をとり、$\eta = \eta(x, t)$ の等値線図を示せばよい。) また、定数 c の意味を説明せよ。

---

[24] 特に、振幅の小さい波では $\rho|\mathbf{u}|^2/2 \ll \rho g h$ が成り立つ。
[25] 式 (7.10) は 1 次元での圧縮性流体に対する連続の式 (3.7) に似ていることに注意しよう。
[26] どちらの式も保存則 (→ §1.4) であることに注意しよう。

7.4 跳水の形成過程

浅水波の方程式を §7.3 で考えた。この方程式を用いて、跳水の形成過程を求めてみよう。跳水とは、津波やボアなど、階段状の水面をもつ波のことを言う。気体力学でいえば衝撃波に相当する。

(1) まず、§7.3 に従い、浅水波の方程式 (7.10)(7.12) を導出せよ。これらの方程式を、行列 A を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} + A\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

の形に書き直せ。

(2) 行列 A に対し、 $\mathbf{p}A = a\,\mathbf{p}$ を満たす横ベクトル $\mathbf{p}$ および スカラー a を求めよ。その結果を

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\pm = \begin{bmatrix} \alpha_\pm & \beta_\pm \end{bmatrix}$$

とし、さらに、

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} = \alpha_+\frac{\partial h}{\partial t} + \beta_+\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad \frac{\partial r_-}{\partial t} = \alpha_-\frac{\partial h}{\partial t} + \beta_-\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{7.15}$$

を満たす $r_\pm$ を求めよ。

(3) 式 (7.14) と式 (7.15) を組み合わせて、次の式を導け:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right] r_+ = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right] r_- = 0; \qquad u = u(r_+, r_-), \quad c = c(r_+, r_-). \tag{7.16}$$

(4) 初期条件を

$$h|_{t=0} = H(x) = h_0 - A\tanh\frac{x}{\lambda}, \qquad r_-|_{t=0} = 0$$

とする (ただし $A > 0$)。下記の方針に従い、水面 $h = h(x,t)$ の時間変化の様子を図示せよ。

- 初期に $r_- = 0$ である限り、いつまでも $r_- = 0$ である。このことを用いて、式 (7.16) から h, x, t 以外の変数を消去する。
- 「 x を与えて h を決める 」という発想を逆転し、$x = x(h,t)$ の形で解を求める。前問の結果から

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_h = \frac{\partial}{\partial t}x(h,t) = [\,t\,\text{を含まない式}\,] \tag{7.17}$$

  という方程式が得られるので、あとは両辺を t で積分すれば 解 $x = x(h,t)$ が得られる。
- 初期条件 $h(x,0) = H(x)$ を利用して積分定数を定める。
- 時刻を $t = 0$ からはじめて少しずつ変化させながら、各時刻における水面の波形を図示する。

注意: ここでの解析結果では、$\partial h/\partial x$ が無限大になったり負になったりするが、これは理論が簡単すぎるためである。実際には、そのようなことが生じる前に、流れが部分的に乱流になったり、浅水波理論で無視した加速度項の影響が現われて 波が複数の山に分かれたりする[27]。

[27] いわゆる分散性のことである。気体の場合と違って、水の波では、パルス状の定常進行波が存在し、ソリトンと呼ばれている。

7.5 定常進行する跳水

階段型の波形を保ったまま定常的に進行する跳水を考える [12, §100]。

(1) §7.3 に従い、浅水波の方程式 (7.10)(7.12) を導出せよ。これらの方程式は 両方とも 保存則をあらわしていることを説明せよ。

(2) 波形を保ったまま速度 c で進行する跳水を考える。状況は次のようになっているとする:

- 跳水が、右側の静止した水域 $(u = 0, \quad h = h_1)$ に向かって速度 c で進んでいる。
- 跳水の左側の水域では $u = u_2 \neq 0, \quad h = h_2 > h_1$ である。

右側および左側での水面の高さ $(h_1,\, h_2)$ は既知であるとして、次の方針に従い、$u_2 = u_2(h_1, h_2)$ および $c = c(h_1, h_2)$ を求めよ。

- 跳水とともに一定速度 c で進む観測者を想定する。この観測者から見た運動方程式は、静止系での運動方程式と全く同じであるが、速度や位置などは適当に変換しなければならない (**Galilei** 変換)。
- もしも跳水が定常進行しているならば、観測者にとって、流れは全く定常に見えるはずである。この条件が満たされるように、$h_1,\, h_2,\, u_2,\, c$ のあいだに成り立つべき関係式を求める。
- 求めた関係式を c および u_2 について解く。

(3) 上記の結果において、$(h_2 - h_1)/h_1 \to +0$ の極限の場合を考えよ。このときの c の極限値を c_1 とする。

(4) 横軸に h_2/h_1, 縦軸に c/c_1 および u_2/c_1 を取り、跳水の速度および流れの速度が水面の段差にどのように依存するかを示せ。

7.6 音波の方程式

圧縮性流体では、圧力変動が有限の伝播速度で流体中を伝わる現象が見られる。特に、微小な圧力変動が伝わる現象を音波という。

(1) 次の方針により、音波が波動方程式

$$\partial_t^2 p - a^2 \partial_x^2 p = 0 \tag{7.18}$$

に従うことを示せ。ただし、簡単化のため、1 次元で考える。

- 気体の運動は、連続の式、Euler 方程式、および

$$p = p(\rho) \tag{7.19}$$

に従うものとする。

- 微小な圧力変動と、それに伴う微小な密度変動・速度変動を考え、

$$p = p_0 + \epsilon p_1, \qquad \rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \cdots, \qquad u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots$$

とする。これを各方程式に代入して ϵ のべきで展開し、ϵ は小さいとして $O(\epsilon^2)$ の項を無視する。

- 圧力以外の変数を消去し、1 本の方程式にまとめる。

(2) 適当な係数 A を用いて $r_\pm = u_1 \pm A p_1$ とおき、$r_\pm$ が 次の式を満たすようにせよ:

$$(\partial_t \pm a \partial_x)\, r_\pm = 0 \tag{7.20}$$

(3) 初期条件を

$$u_1 = 0, \qquad p_1 = \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

とする (λ は定数)。(i) まず $r_\pm$ を求め、時空間における挙動を図示せよ (横軸に $\tilde{x} = x/\lambda$, 縦軸に $\tilde{t} = at/\lambda$ をとり、$r_\pm = r_\pm(\tilde{x}, \tilde{t})$ の等値線図を示す)。(ii) この結果から p_1 を求め、時空間での挙動を図示せよ。

(4) 音速 a を計算するには、関係式 (7.19) の具体的な形が必要である。標準状態における空気を想定し、以下の 2 つの仮定にしたがって、それぞれ音速を計算してみよ。どちらが実際の測定値に近い結果が出るか?

- 等温変化: $T = \text{const.}$ (温度一定)
- 断熱変化: $S = \text{const.}$ (エントロピー一定)

ヒント: 理想気体では、質量あたりの内部エネルギー U およびエントロピー S は、

$$U = \int c_V dT = c_V T \tag{7.21}$$

$$S = \int \frac{c_V}{T} dT + \int \frac{R}{V} dV = S_0 + c_V \log \frac{T}{T_0} + R \log \frac{V}{V_0} \tag{7.22}$$

と書ける [5, p.46]。ここで、$V = 1/\rho$ は質量あたりの体積であり、c_V は定積比熱、R は質量あたりの気体定数[28]で、比熱比 γ を用いると $R = (\gamma - 1)c_V$ が成り立つ。空気では $\gamma \fallingdotseq 1.4$ である。

式 (7.21)(7.22) のなかには理想気体の状態方程式が隠れていることに注意しよう。一般に、どんな物質でも、(S, U, V) の関係式が分かれば、そこから状態方程式を導くことができる。理想気体の場合、式 (7.21) と式 (7.22) から T を消去し、U について解くと

$$U = U_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1-\gamma} \exp\left(\frac{S - S_0}{c_V}\right)$$

となる。 これと熱力学の法則 $dU = T\,dS - p\,dV$ から

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \cdots = \rho R T \tag{7.23}$$

を得る。 式 (7.23) は、よく知られた 理想気体の状態方程式である。

7.7 速度勾配と粘性応力

流体運動において粘性が完全に無視できるのは例外的な場合である。ふつうは粘性の影響が無視できないので、粘性を考慮した流体の運動方程式が必要になる。そのような方程式を導くには、§3.4 で応力を扱っている部分を修正し、圧力に加えて粘性応力を含めればよい。ふつうの流体[29]では、粘性応力は $\partial_x u, \partial_y u$, etc.(速度勾配) の線形結合に比例する。さらに、対称性の考察 [13, §1-9] あるいは統計力学的な理論 [14, p.454] から粘性応力の形が決定され、**Navier-Stokes** 方程式が導かれる。

(1) まずは 2 次元で速度勾配について考察しよう。例として、式 (2) で与えられる速度場 $\mathbf{u}$ を考える (図 2 を見よ)。この速度場を、適当な点の近傍で、並進 $\mathbf{u}_0$ と回転 $\mathbf{u}_\mathrm{R}$ と伸縮変形 $\mathbf{u}_\mathrm{D}$ とに分解せよ。

- まず、一点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ に着目し、$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (X, Y)$ とおく。
- (X, Y) は微小だとして、$\mathbf{u}$ を Taylor 展開する。この展開の 1 次の項の係数が速度勾配である。

[28] モルあたりの気体定数を $\tilde{R}$ とすると、高校で習ったように、n モルの気体の状態方程式は、$pV = n\tilde{R}T$ と書ける。分子のモルあたりの質量を M とすると、$\rho = Mn/V$ だから、$p = \rho\tilde{R}T/M$ が成り立つ。これと式 (7.23) を比較し、$R = \tilde{R}/M$ を得る。

[29] 水や空気や水飴など、低分子より成る流体が該当する。逆に言えば、血液や澱粉糊やマヨネーズは対象外である。

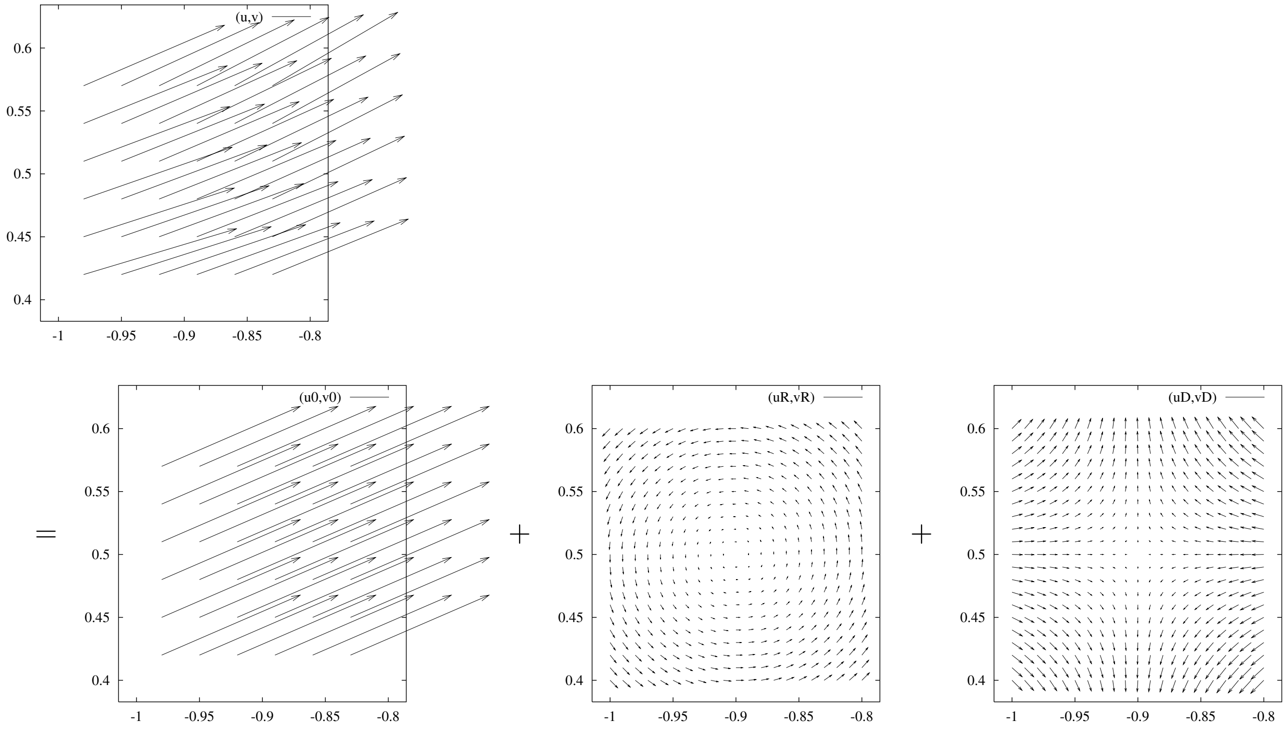

図 4: 流れを並進と回転と伸縮変形に分ける: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\mathrm{R} + \mathbf{u}_\mathrm{D}$

- 展開した結果をうまく変形して、次の形に書き直す:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_\mathrm{R} + \mathbf{u}_\mathrm{D}; \qquad \mathbf{u}_\mathrm{R} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\omega Y \\ +\omega X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} aX + bY \\ bX + cY \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

ここで ω, a, b, c は もちろん定数であり、$\mathbf{u}_0$ は定数ベクトル、S は定数行列である。

分解した結果の一例を図 4 に示す。

(2) 別の例として、静止した壁と運動する壁のあいだの狭いすきまにはさまれた流体の運動 (**Couette** 流) を考えよう[30]。静止している壁の位置を $y = 0$, 動いている壁の位置を $y = H$ とし、壁の速度を $\mathbf{U} = (U, 0)$ とする。このとき、壁によって駆動される粘性流体の速度は

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} y \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\gamma} = \frac{U}{H} = \text{const.} \tag{7.25}$$

で与えられる。
さきほどの例と同様に、式 (7.25) で与えられる流れを 並進 $\mathbf{u}_0$ と回転 $\mathbf{u}_\mathrm{R}$ と伸縮変形 $\mathbf{u}_\mathrm{D}$ とに分解せよ。さらに、図 4 と同様に、結果を図示せよ。

(3) 伸縮変形をあらわす行列 S の固有ベクトルを求めよ。その結果を利用して、次の式を導け:

$$\mathbf{u}_\mathrm{D} = \tilde{X}_1 s_1 \mathbf{p}_1 + \tilde{X}_2 s_2 \mathbf{p}_2, \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \tilde{X}_1 \mathbf{p}_1 + \tilde{X}_2 \mathbf{p}_2 \tag{7.26}$$

この結果と $\mathbf{u}_\mathrm{D}$ の図を見比べることにより、項 $\tilde{X}_1 s_1 \mathbf{p}_1$ および $\tilde{X}_2 s_2 \mathbf{p}_2$ の物理的意味を考えよ。

[30]たとえば、軸受けのまわりの潤滑油の流れや、ハードディスクとヘッドのあいだの気体の流れを想定せよ。

(4) 以下、3 次元で考える。 次の方針により、Navier-Stokes 方程式 (7.6) を導け:

- 運動量のバランスの式 (3.14) の 3 次元版を、粘性応力 τ'_{ij} を考慮して書き下す。
- 非圧縮流体の場合、粘性応力は

$$\tau'_{ij} = 2\eta S_{ij} \qquad \left(\text{ただし } 2S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{7.27}$$

  という比較的簡単な式で与えられる[31]。これを運動量のバランスの式に代入する。
- さらに、η は定数であるものとし、非圧縮条件 (3.2) を用いて式を簡単化する。

7.8 熱伝導

粘性流体の方程式である渦度拡散方程式は、見方によっては、熱伝導方程式 (3.8) によく似ている。そこで、粘性流体の問題にとりかかかる前に、簡単な熱伝導の問題を解いてみよう。話をなるべく単純にするため、1 次元の問題を考え、また流れは存在しないものと仮定して、熱伝導方程式 (3.8) を

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T \tag{7.28}$$

のように単純化して考える。問題設定は次のようにしよう:

- 長い鉄の棒があって $0 < x < +\infty$ の範囲を占めている。
- 時刻 $t = 0$ までは、この棒の温度は一様 ($T = T_0 = \text{const.}$) であった。
- 時刻 $t = 0$ において、棒の端を 温度 $T_{\mathrm{w}}(= T_0 + T_1)$ の壁に接触させたため、壁から熱が伝わりはじめた。この壁にはヒーターか何かが仕込んであり、壁の温度は常に T_{w} に保たれているので、棒の一端 $(x = 0)$ の温度は 常に T_{w} であり、ここから x 軸にそって熱が伝わっていくことになる。

この鉄棒における温度分布が時間とともに変化する様子を、1 次元熱伝導方程式 (7.28) を用いて考察しよう。

(1) 次の方法にしたがって、方程式 (7.28) の初期値・境界値問題の解を求めよ。

- 解の形を $T = T_0 + T_1 f(s),\ \ s = \text{const.} \times \kappa^\alpha x^\beta t^\gamma$ と仮定する。こういう解が本当に存在するならば、s はちょうど無次元の変数になるはずである。この条件をみたすように α, β, γ の値を定める[32]。
- 連鎖則を用いて $\partial/\partial x$ および $\partial/\partial t$ を d/ds であらわす。
- 熱伝導方程式を s を用いた形に書き直す (これで常微分方程式になれば成功である)。これに合わせて境界条件も書き直す。
- この常微分方程式を解いて f を求める (補遺 C を参照せよ)。
- 最終的に、温度場 T を 時間 t と空間座標 x の関数として求める。

(2) 次に、温度場の空間変化および時間変化の様子を示すため、結果を図示せよ。

- 時刻 $t = t_0\ (> 0)$ での温度場を図に描く (GNUPLOT などを用いて正確な図を作ること)。
- 同様に、$t = t_1 = 4t_0$ での温度場を図に描き、時刻 $t = 0$ での温度場と比較する。

(3) 壁から $x = x_{\mathrm{H}}$ までの領域は $T > T_{\mathrm{w}} - T_1/2$ となるような高温領域である。時間の経過とともに高温領域がしだいに広がっていく様子を図示し (GNUPLOT を用いる)、説明せよ。

[31] 圧縮性流体の場合、粘性応力の式は少々複雑になる。具体的な形については、適当な教科書 (たとえば文献 [5, p.58]) を見よ。
[32] 任意定数が残る場合は、$\beta = 1$ となるように決めると あとの計算が楽になる。

7.9 平面 Poiseuille 流

Navier-Stokes 方程式 (7.6) を手計算で解くことを考える。あるいは、その変形版である渦度拡散方程式 (7.7) を代わりに解いてもよい。

ここでは、静止した壁をもつ狭い流路を流体がまっすぐに流れる場合 (**Poiseuille 流**) を考えよう。流体は、$y=0$ および $y=b\ (>0)$ にある 2 枚の平面壁にはさまれた狭い流路を、x 方向にまっすぐ流れている。外力はゼロであり、流れは定常である。壁の端のことは考えない。また z 方向のことも考えない。

(1) 水路の様子を図に描け。
(2) 次の方針に従って方程式を簡単化せよ。

- まず連続の式から $\partial_x u = 0$ を示す。
- 渦度 ω に対して $\partial_x \omega = 0$ を示す。これを用いて、渦度拡散方程式 (7.7) を簡単化する:

$$\partial_y^2 \omega = 0 \tag{7.29}$$

(3) 簡単化された渦度方程式 (7.29) の解を求め、これと

$$\text{壁面上で} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7.30}$$

という条件 (粘着条件[33]) から 速度場 $\mathbf{u}$ を求めよ。
(4) 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ を求め、図示せよ。
(5) 時刻 $t=0$ において、$x=0$ の位置にある流体に、インクか何かで印をつけた。時刻 $t=0$ では、インクは長さ b の線分として観察される。この線分が、時間の経過とともにどのように変形するか、説明せよ。ただし、インクの拡散は無視する。

7.10 円管 Poiseuille 流

実際の応用で重要な例として、円管の場合を考える。このためには座標を円筒座標に直しておくほうが良い。

(1) (i) ふつうの座標 (x,y,z)—**Descartes 座標**—と 円筒座標 (r,θ,ζ) のあいだの関係式が

$$(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \zeta) \tag{7.31}$$

であるとして、$\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ を $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ で表せ。
[注意: 演算子を含む計算では順番を勝手に変えてはいけない。$e^{-x^2}\partial_x\phi$ と $\partial_x e^{-x^2}\phi$ は異なる!]
(ii) 上記の関係式を逆に解いて[34]、$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ を $\partial_r,\ \partial_\theta,\ \partial_\zeta$ で表わせ。
(2) 細い管[35]では、次のような仮定をおくことができる:

- 流れは常に軸に平行であり、$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ は軸方向の単位ベクトル) とおける
- 流れは定常かつ軸対称

さらに、外力 $\mathbf{f}$ は ゼロだとする。このような条件のもとで、Navier-Stokes 方程式 (7.5)–(7.6) を円筒座標に書き直せ (明らかにゼロになるような項は省略すること)。

---

[33] 粘着条件は実験事実である。たとえば、コーヒーに少しだけクリームを入れ、スプーンでかきまぜて観察してみると良い。あるいは、実験の写真 [15, p.114] を見よ。ただし、気体では多少のすべりが生じる場合があると言われている。
[34] 連立方程式を解く際に、割算をなるべく避けるためには、代入法よりも加減法を用いるほうが良い。
[35] 太い管では、(入口付近で精密な制御をおこなって撹乱を取り除くようにしない限り) 以下の条件が成り立たない。これは、流れが不安定になり、乱流が生じるためである。どれくらい細ければよいかは流速と粘性に依存する。このことを発見したのが、有名な Reynolds の実験 [7, §8-1] である。

(3) 解くべき方程式を

$$[\, r \text{ によらない項} \,] = [\, z \text{ によらない項} \,]$$

の形に変形し、2 つの常微分方程式に分離せよ。さらに、分離した方程式を解いて速度 u を求めよ。ただし壁面 $(r = a)$ では粘着条件を課す。

(4) (i) 速度場を (z, r) 面内のベクトル場として図示せよ。(ii) (x, y) 面における速度の等値線を図示せよ。

(5) 管の断面を通る単位時間あたりの体積流量 Q を求めよ。他の条件を一定にして a を変えたとき、Q はどのように変化するか? (これが**Hagen-Poiseuille** の法則[36]である。)

(6) 内径 $a = 0.4\,\mathrm{mm}$、長さ $15\,\mathrm{cm}$ の毛細管に水をとおす。 (i) 3 分で $100\,\mathrm{m}\ell$ の水をとおすために必要な圧力を計算せよ。(ii) この圧力を水深に換算すると どれくらいになるか? (物理学実験の授業で水の粘性係数を測ったことのある人は、自分の経験と一致しているかどうか検討すること。)

7.11 斜面上の液膜流

斜面上を重力によって流れる薄膜状の非圧縮流体の運動 (液膜流) を考える [8, p.289]。

(1) まず、流れが定常であり、液膜の厚さが一定値 h である場合を考える。次の手順によって、速度場が

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u = \frac{(g \sin\beta) h^2}{2\nu} \left\{ \frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \tag{7.32}$$

で与えられることを示せ。式 (7.32) を**Nusselt** 解という。

- 水平面に対する斜面の傾斜角を β とする。斜面を下る方向に x 軸をとり、法線方向に y 軸をとると、速度および外力項は

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \rho g \begin{bmatrix} +\sin\beta \\ -\cos\beta \end{bmatrix}$$

とあらわされる。これを Navier-Stokes 方程式 (7.6) に代入し、成分で書き直す。

- 連続の式を用いて $\partial_x u = 0$ を示す。これを用いて、Navier-Stokes 方程式を簡単化する。
- 境界条件 $p|_{y=h} = p_0$ を考慮し (ここで p_0 は大気圧)、p を求める。
- 速度については、壁面 $(z = 0)$ では粘着条件を課し、表面 $(y = h)$ では剪断応力がゼロという条件

$$\tau_{xy} = 0 \tag{7.33}$$

を課す。ここで $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ であり、τ'_{ij} は 式 (7.27) で与えられる。これらの条件を考慮して速度 $\mathbf{u}$ を定める。

(2) 次に、h が完全に一定ではなく、ゆるやかに変化する場合を考える。表面の勾配 $|\partial h/\partial x|$ が 微小であれば、近似的に Nusselt 解 (7.32) が適用できる。

(i) 式 (7.10) と同様に考えて

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{7.34}$$

[36] 土木学者 Hagen と医学者 Poiseuille は、実験によってそれぞれ独立にこの法則を発見した。なお、文献 [16, pp.31-36] のように、複雑な計算をすべて省略し、次元解析を用いていきなり Hagen-Poiseuille の法則を導く方法もある。

という式が成り立つことを示し、Q を h であらわせ。(ii) 式 (7.34) から Q を消去し、次の式を導け:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+C\frac{\partial h}{\partial x}=0, \qquad C=C(h) \tag{7.35}$$

(3) 初期条件を

$$h|_{t=0}=h_0-A\tanh\frac{x}{\lambda} \tag{7.36}$$

とする (ただし $A>0$)。 下記の方針に従い、表面 $h=h(x,t)$ の時間変化の様子を求めて図示せよ。

- 「x を与えて h を決める」という発想を逆転し、$x=x(h,t)$ と考えてグラフを描くことにする。
- 初期条件 (7.36) を h について解き、$x|_{t=0}$ を求める。
- 式 (7.35) を式 (7.17) の形に書き直す。
- 初期条件を考慮して $x=x(h,t)$ を決定する。
- 時刻を $t=0$ からはじめて少しずつ変化させながら、各時刻における表面の波形を図示する。

注意: もちろん、この解析結果は近似的なものにすぎない。理由は、時間とともに波形が変化し、それにつれて しだいに $|\partial h/\partial x|\ll 1$ という条件が成り立たなくなるからである。その後の波形を決める要因としては、慣性の効果と表面張力の効果が本質的であり、その結果、特徴的な「さざ波」を伴うパルス状の波が形成される。

7.12 円柱を過ぎる遅い流れ

問題 3.6 と同じような状況の流れを、こんどは、粘性を考慮した方程式によって解析してみよう。出発点としては、渦度拡散方程式 (7.7) において §3.5 と同様の仮定をおこない、さらに

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\simeq U\partial_x$$

と近似したものを用いる (**Oseen** 近似)。この近似は、粘性が比較的大きいときに有効である[37]。

(1) 流れが 2 次元だという仮定を用いると、渦度拡散方程式 (7.7) は

$$(\partial_t+\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\omega=\nu\nabla^2\omega$$

のように簡単化されることを示せ。

(2) (i) Oseen 近似を適用し、さらに変数をうまく置き直すことにより、渦度拡散方程式を

$$\left(\partial_x^2+\partial_y^2-\alpha^2\right)\Omega=0 \tag{7.37}$$

のような形に書きなおせ。(ii) 定数 α と**Reynolds** 数の関係を示せ。

ヒント: まず $\omega=\Omega e^{+\alpha x}$ と置いて代入し、次に α の値を適切に選ぶ。

(3) 円柱の近く ($r>D/2$ かつ $\alpha r\ll 1$ となる領域) では[38]、次の近似が成り立つ:

- 方程式 (7.37) において、α の項を無視できる。

---

[37]...ということは、粘性が大きくもなくゼロでもないような場合は、近似解は使えないことになる (そういう場合にも成り立つ近似を考えるのは不可能ではないかもしれないが、ものすごく難しい)。

[38]このような領域が存在するためには、円柱の直径 D が $\alpha D\ll 1$ を満たす必要がある。つまり、流れの Reynolds 数が小さくなければならない。

- $\omega \simeq \Omega$ と見なせる。

したがって

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\omega = 0$$

として良い。この方程式を極座標で書き直し、無限遠で $\omega \to 0$ という条件のもとで一般解を求めよ。

(4) 流れ関数 ψ を式 (3.21) のように仮定し、これから渦度 ω を計算して、これを上で求めた結果と等しいと置くことによって流れ場を求めよ。

(5) 渦度 ω および流れ場 $\mathbf{u}$ を図示せよ (GNUPLOT を用いること)。また、§3.6(粘性がない場合) の結果を図示し、粘性が大きい場合との違いについて検討せよ。

注意: 上記の解析では α は小さいとして無視しているが、この近似は円柱の近くでしか成り立たないから、無限遠での境界条件をあてはめて解を確定することができない。無限遠まで成り立つ解を得るには、α を含めて方程式 (7.37) を解く必要がある (文献 [13] を見よ)。

8 レポート課題: 「粘性のある流れ」

Feynmann 物理学の「粘性のある流れ」(文献 [10] 第 20 章) を読み[39]、他の資料 (文献 [11] の第 9 章・第 10 章や、流れの実験の写真集 [9, 17] など) も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。

- Reynolds 数とは何か?
- 2 つの円筒のあいだの Couette 流 (**Taylor-Couette** 流):
  流れは壁に平行な定常流であると仮定して、手計算で解を求め、この解と実際の実験結果が一致するための条件について調べよ。また、この条件が破れると、実験ではどのような流れが観察されるか?
- 円柱を過ぎる流れ:
  Reynolds 数の大きさをいろいろ変えると、流れの様子はどのように変化するか? (単なる模式図でなく、なるべく本物の実験の写真を見てスケッチせよ。また、§3.6 や §7.12 の結果との関連を考えよ。)

このレポートと一緒に、第 7 章の選択課題のレポートも忘れずに提出すること。

参考文献

[1] 砂川重信. 電磁気学. 物理テキストシリーズ 4. 岩波書店, 1977.

[2] 吉田武. ケプラー・天空の旋律. 共立出版, 1999.

[3] 森毅. 線形代数—生態と意味. 日本評論社, 1980.

[4] 中村純. 物理とテンソル. 物理数学 One Point 3. 共立出版, 1993.

[5] 巽友正. 流体力学. 新物理学シリーズ 21. 培風館, 1982.

[6] Glansdorff and Prigogine. 構造・安定性・ゆらぎ — その熱力学的理論. みすず書房, 1977.

[7] 巽友正. 連続体の力学. 岩波基礎物理学シリーズ 2. 岩波書店, 1995.

[39] 天才的な洞察に満ちた本ではあるが、しかし、この章における「境界層」という語の使い方にはいささか疑問がないわけではない。ふつうの意味での「境界層」については、たとえば文献 [5] の第 15 章や、文献 [11] の p.169 以降を見よ。

[8] 今井功. 流体力学 (前編). 物理学選書 14. 裳華房, 1973.

[9] 種子田定俊. 画像から学ぶ流体力学. 朝倉書店, 1988.

[10] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁波と物性. ファインマン物理学 IV. 岩波書店, 1971.

[11] 神部勉, 石井克哉. 流体力学. 裳華房, 1995.

[12] Landau and Lifshitz. 流体力学 2. 東京図書, 1971.

[13] 木田重雄. 流体方程式の解き方入門. 物理数学 One Point 11. 共立出版, 1994.

[14] 久保亮五. 大学演習 熱学・統計力学. 裳華房, 1961.

[15] 松信八十男. 変形と流れの力学. 基礎の物理 2. 朝倉書店, 1981.

[16] 青野修. 次元と次元解析. 物理学 One Point 16. 共立出版, 1982.

[17] 日本機械学会. 写真集 流れ. 丸善, 1984.

[18] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁気学. ファインマン物理学 III. 岩波書店, 1969.

[19] Donald A. McQuarrie. Statistical Mechanics, chapter 17, Continuum Mechanics. HarperCollins, 1976.

[20] E. Kreyszig. 線形代数とベクトル解析. 技術者のための高等数学 2. 培風館, 1987.

大学で物理学を学ぶ以上は、天才 Feynman の講義録を一度は必ず読むべきである。このプリントの前半の主題である「場」という考え方は、電磁気学の講義と並行する形で、文献 [18] の第 2・3・4・12 章で説明されている。

後半は流体力学の演習である。大西研の演習という性格から、波動に関連する題材が多くなったが、その枠のなかで、なるべく気体だけでなく液体 (非圧縮流体) も扱うように配慮した。流体力学の参考書としては、文献 [11] か [7] が手頃だろう。また、巽友正の「流体力学」[5] は、大学院で流体をやるならぜひ買っておきたい。文献 [8] は名著ではあるが、高価でかつ未完であるから、特に急いで購入する必要はないと思う。

このプリントは 1997 年に書いた原型を何度か改訂したものである。当初の原型では、主に文献 [6, 19] を参考にした。

補遺

A　ギリシャ文字

A	α	alpha
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	e-psilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta

I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	o-micron
Π	π	pi

R	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	u-psilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi (khi)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	o-mega

B 球面のパラメータ表示

半径 a の球面をパラメータ表示し、その上の面積要素 $\mathbf{n}dS$ を求めよう (ここで $\mathbf{n}$ は単位法線ベクトル)。それには、球面上の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を 2 つのパラメータであらわし、パラメータを微小に変化させてできる平行四辺形を考えればよい。

物理学では、ふつう (θ, ϕ) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a \sin\theta\, \cos\phi,\ a \sin\theta\, \sin\phi,\ a\cos\theta) \tag{B.1}$$

とあらわす。式 (B.1) は、$\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ を用いると

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{e}_r = (\sin\theta\, \cos\phi,\ \sin\theta\, \sin\phi,\ \cos\theta)$$

と書ける。微小な平行四辺形の辺に相当するベクトルは $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}\Delta\theta$ および $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi}\Delta\phi$ であり、式 (B.1) を用いて具体的に計算すると

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} = (a\cos\theta\, \cos\phi,\ a\cos\theta\, \sin\phi,\ -a\sin\theta)$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi} = (-a\sin\theta\, \sin\phi,\ a\sin\theta\, \cos\phi,\ 0)$$

したがって

$$\mathbf{n}dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta}d\theta\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi\right) = \cdots = \mathbf{e}_r\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{B.2}$$

を得る[40]。

場合によっては、式 (B.1) とは異なる表し方を用いることもある。たとえば地球物理では通常の緯度や経度に合わせた変数を用いるほうが好都合だろう。クライツィグ [20, p.182] は、(u, v) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a\cos v\, \cos u,\ a\cos v\, \sin u,\ a\sin v) \tag{B.3}$$

とあらわしている。さきほどと同様に $\mathbf{n}dS$ を求めると、結果は

$$\mathbf{n}dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}dv\right) = \cdots = \mathbf{e}_r\, a^2 \cos v\, du\, dv \tag{B.4}$$

となる。

C Gaußの誤差関数

Gaußの誤差関数を

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2} ds, \qquad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-s^2} ds \tag{C.1}$$

のような積分で定義する[41]。これらの関数の挙動を知るには、GNUPLOT を起動して

```
plot erf(x), erfc(x)
```

などと入力してグラフを描けばよい。範囲やタイトルの自動設定が気に入らない場合は

```
plot [0:2.5] [0:1.2] erf(x) title "Gauss' error function"
```

のようにして自分の好きなように指定する。

[40] 外積の図形的な意味を思い出してほしい: 平行四辺形の 2 つの辺の外積は、面ベクトル (面積と法線を示すベクトル) を与える。
[41] 本によって定義が違う場合があるので注意すること。