

流体の数学

鳥取大(工)応用数理工学科 大西研究室

数理工学演習 I/II (2003-10-29 版)

概要

このプリントは、3 回生の科目「数理工学演習 I/II」のための課題である。第 1 週および第 2 週に第 I 部の演習をおこない、第 II 部の演習を第 3 週および第 4 週におこなう。

まず、演習に来る前に、第 1 章の演習問題を予習しておいてほしい。演習の最初の週に、これらの問題について予習確認テストをおこなったあと、黒板で説明してもらおう。第 2 章「『場』というもの」はレポート課題で、これは 2 週目の冒頭に提出する。

最初の週の終了時に、第 3 章の課題分担を決めておく(あまり細分化しないように)。2 週目には、この分担に従い、課題の内容を発表する。第 4 章はレポート課題で、演習終了後 2 週間をめぐりに提出する。

第 II 部も、第 I 部とほぼ同じように進める予定である。したがって、後期の最初の週には、第 5 章を予習してこななければならない。ただし、最後の週の課題は、第 7 章のすべてではなく、適宜選択してもらうことになる。最後の第 8 章はレポート課題である。

目次

第 I 部	流体の方程式を導く	2
1	流体の方程式を導くための準備	3
1.1	面積分と体積積分	3
1.2	Gauß の定理	3
1.3	添字記法	4
1.4	保存則の微分形: バランスの式	4
1.5	運動量保存則	5
2	「場」というもの	5
3	流体力学の方程式	6
3.1	流体要素と物質微分: Lagrange 表示	7
3.2	拡散方程式: Euler 表示	10
3.3	非圧縮条件	11
3.4	非粘性流体の運動方程式	11
3.5	非粘性の 2 次元非圧縮流れ	13
3.6	円柱を過ぎる非粘性の流れ	14
4	レポート課題: 「粘性のない流れ」	14

第 II 部 流体の運動を解析する	15
5 ベクトル解析の復習	15
5.1 ベクトル場の微分に関する公式	15
5.2 渦の流れ	15
6 微分方程式	16
7 流体力学の方程式を解く	17
7.1 渦度方程式	18
7.2 水の波	19
7.3 浅水波	19
7.4 跳水の形成過程	20
7.5 定常進行する跳水	21
7.6 音波の方程式	22
7.7 速度勾配と粘性応力	22
7.8 熱伝導	24
7.9 平面 Poiseuille 流	25
7.10 円管 Poiseuille 流	26
7.11 斜面上の液膜流	26
7.12 円柱を過ぎる遅い流れ: Stokes 近似	27
7.13 円柱を過ぎる遅い流れ: Oseen 近似	28
7.14 平板境界層	29
8 レポート課題: 「粘性のある流れ」	29
8.1 Feynmann 物理学「粘性のある流れ」	29
8.2 身のまわりの流れの Reynolds 数	30
A ギリシャ文字	31
B 線積分と面積分: 計算マニュアル	31
C 球面のパラメータ表示	32
D 勾配・循環・発散	33
E 理想気体のエントロピー	34
F 連鎖則	35
G 誤差関数・積分指数関数	36
H Helmholtz 方程式と Bessel 関数	37

第I部

流体の方程式を導く

1 流体の方程式を導くための準備

1.1 面積分と体積積分

- (1) 領域 $V_1 = \{ (x, y, z) \mid 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, 0 < z < L_3 \}$ に水が満たされ、そのなかに塩が分布している (濃い場所もあれば真水に近い場所もある)。塩分濃度 (体積あたりの塩の質量) を c であらわすと

$$c = c_0 e^{-kz} \quad (c_0 \text{ と } k \text{ は正の定数})$$

のようになっているとしよう。(i) 領域 V_1 を図示し、微小体積に分割せよ。(ii) 微小体積 ΔV に含まれる塩の質量 ΔM を求めよ。(iii) 領域 V_1 のなかに存在する塩の総質量 M を求めよ。

- (2) 領域 $V_2 = \{ (x, y, z) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 < z < h \}$ のなかに、

$$\rho = \rho_0 e^{-(x^2+y^2)/a^2} \quad (\rho_0 \text{ と } a \text{ は正の定数})$$

のような電荷密度分布が存在している。領域 V_2 のなかの電荷の総量 q_2 を求めよ。

- (3) 電磁気学における **Gauß** の法則 [1, p.89] によれば、領域 V のなかに存在する電荷の量は、領域 V の表面 S を貫いて内側から外側へ向かう電気力線の総量に等しい¹。

領域 $V_3 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \}$ において

$$\mathbf{D} = \begin{cases} (0, 0, +\epsilon_0 E_0) & (z > 0 \text{ において}) \\ (0, 0, -\epsilon_0 E_0) & (z < 0 \text{ において}) \end{cases}$$

のような電束密度場が存在しているとしよう。(i) 領域 V_3 の表面を微小面積 ΔS に分割し、外向き法線ベクトル \mathbf{n} とともに示せ (補遺 C を参照)。(ii) それぞれの微小面積 ΔS をつらぬく電気力線の量を求めよ。(iii) 領域 V_3 に含まれる電荷の総量 q_3 を求めよ。

1.2 Gauß の定理

ベクトル解析でいう Gauß の法則 (**Gauß** の定理) は、

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV = \int_{V \text{ の境界}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.1)$$

という恒等式である²。電磁気学における “Gauß の法則” とは、関係はあるけれども概念的には別のものだから、混同してはいけない。

- (1) ベクトル場 \mathbf{f} および 領域 V を具体的に

$$\mathbf{f} = (5z, x + y, 2z), \quad V = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \}$$

として、式 (1.1) の左辺の値を求めよ。

- (2) 上記の \mathbf{f} および V に対し、式 (1.1) の右辺を正直に計算し、左辺の計算結果と一致することを確かめよ。

¹面積あたりの電気力線の密度をあらわす場が電束密度場 \mathbf{D} であり、真空中では $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ で与えられる。物質中 (すなわち直接考慮しない電子や陽子がたくさんある場合) の \mathbf{D} と \mathbf{E} の関係は一般には複雑であるが、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ と考えてよい場合が多い。

²文献 [2, §60] に次のような言葉がある: “「公式」などと一口に言うが、数学に於ける公式は主に「恒等式」であり、物理学に於ける公式は、「方程式」である。”

1.3 添字記法

ベクトル解析では、

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

のように、同じパターンの項を3個つづけて書く³ことがよくある。これを、添字記法⁴では

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \partial_j a_j, \quad [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}]_i = a_j b_j c_i$$

のように略記する。本当は $\sum_{j=x,y,z} \partial_j a_j$ のように書くべきなのだが、添字記法ではふつう \sum を省略し、そのかわり「添字が2つ重複していたら \sum を補って考える」ということになっている (**Einstein** の規約)。

(1) 上記の例に倣って、(i) まず成分で表記し、(ii) 次に添字記法による略記を示せ。

(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(b) $\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}$

(2) 添字記法を用いて、次の公式をなるべく簡潔に証明せよ:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \operatorname{div} \mathbf{u} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = (\nabla f) \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{1.3}$$

1.4 保存則の微分形: バランスの式

電磁気学や流体力学では、しばしば、

$$\text{積分形の方程式} \Leftrightarrow \text{微分形の方程式}$$

という書き換えが必要になる。たとえば、**Gauß**の法則には

$$\text{積分形: } \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \tag{1.4}$$

$$\text{微分形: } \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \tag{1.5}$$

という2つの形がある。積分形(1.4)と微分形(1.5)は、書き方が違うだけで実質的な内容は同じであり、**Gauß**の定理(1.1)を用いて一方から他方を導くことができる⁵。

(1) 物質の質量分布は、密度 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ であらわすことができる。質量保存則を積分形で書いた式

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \tag{1.6}$$

を、微分形に直せ。なお、 \mathbf{u} は流れの速度をあらわす。

³ここで3個というのは3次元の場合で、一般に n 次元ベクトルの内積では n 個の項を足す必要がある。

⁴人によっては、添字記法のことを「テンソル」と言うが、これは少々奇妙な語法である。現代数学でテンソルと言う場合、添字記法で書かれるとは限らず、むしろ直積(テンソル積) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ を用いて書くことが多い [3, §11]。また、物理でいうテンソルでは、いわゆる変換則(座標変換と成分の変換がどう連動するか)が重要である [4]。いずれにしても添字はテンソルにとって本質的ではない。

⁵さっき「**Gauß**の定理と **Gauß**の法則とは概念的に別のものだから混同してはいけない」と書いてあったのを思い出そう。

- (2) 水中にゾウリムシか何かが多数いるとして、その数密度を $\phi = \phi(x, y, z, t)$ と書く。場所ごとの増殖を示す項を σ とすると、ゾウリムシの数密度に関する積分形の式

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \int_V \sigma dV - \int_S \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.7)$$

が得られる。(i) この式を微分形に直せ。(ii) 前問 (1) の結果と比較せよ。

一般に、何らかの量 (物質・エネルギー・電荷など) が空間に分布している場合、その分布の時間変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{分布密度}] + \text{div} [\text{流束項}] = [\text{生成項}] \quad (1.8)$$

という形の式に従う [5, §1]。式 (1.8) をバランスの式あるいは広義の保存則という⁶。

1.5 運動量保存則

流体の運動方程式は、 N 個の粒子 (ただし $N \rightarrow +\infty$) におきかえて考えることができる。しかし、いきなり最初から $N \rightarrow +\infty$ の場合を考えるのは難しいので、まずは $N = 2$ の場合 (2 質点系) の復習をしよう。

- (1) 質点 A と質点 B が力を及ぼしあう場合を考える。(i) Newton の運動方程式を

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_A &= F_{B \rightarrow A} \\ \frac{d}{dt} \Pi_B &= \dots \end{aligned}$$

の形で書き直せ。(ii) 運動量 Π_A, Π_B を銀行の口座残高に例えて考えることにする。この比喻を用いて「作用・反作用の法則」を説明せよ。(iii) 系全体の運動量の合計が一定に保たれることを説明せよ。

- (2) 機関車を含めて 3 両連結で走る列車の運動方程式を上記のような形で記し、考察せよ。特に、発車あるいは停車の場合を考察し、機関車の果たしている役割を明らかにせよ。

2 「場」というもの

数学的には、“空間座標 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数” あるいは “空間座標 \mathbf{r} と時刻 t の関数” のことを場(field) と称する。いままで、質量分布・電荷分布などという書き方をしてきた (??) が、これらは「密度場」「電荷密度場」などと呼ぶべきものである。また、磁力線が空間に分布している様子は磁場(あるいは“磁束密度場”)として記述される。

- (1) 場にはベクトル場・スカラー場などがある。これらの違いは何か?
 (2) 新聞を買って天気図を切り抜き、レポート用紙に貼りつけて、次の点について説明せよ:
- どのようなベクトル場やスカラー場が用いられているか?
 - 圧力の極大値や極小値はどこにあるか?
 - 鳥取における風向や風速はどう読み取れるか?

⁶生成項がゼロの場合が狭義の保存則である。式 (1.6) や式 (3.7) が該当する。

(3) コンピュータによるグラフ作成ツール (GNUPLOTやNgraphなど) を用いて⁷、以下のスカラー場を図示せよ:

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1 & (x^2 + y^2 \leq 1) \\ -\frac{1}{2(x^2 + y^2)} & (x^2 + y^2 > 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

なお、スカラー場の図示では、まず等値線図を示すこと。可能ならば鳥瞰図も追加する (図1を見よ)。また、等高線がじゅうぶん滑らかになるように、サンプリング数 (GNUPLOT と言えば *isosamples*) を適切な値に設定すること。不適切なレポート (サンプリング数が足りないとか、鳥瞰図だけで等値線図がないとか) については、再提出を求める。

(4) 同じく、コンピュータによるグラフ作成ツールを用いて、ベクトル場

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = (A \sin x \cos y, B \cos x \sin y, 0) \quad [A, B \text{ は定数}] \quad (2.2)$$

を図示せよ。ここで、 A および B の値は、次の4とおりとする:

- $A = 0.5, B = -0.5$
- $A = 0.8, B = -0.2$
- $A = 0.8, B = 0.5$
- $A = -0.8, B = 0.8$

結果を図2に示してあるので、参考にすること。

ベクトル場は、図2や図4のように、小さな矢印をたくさん描いてあらわす。位置 \mathbf{r} と 場 \mathbf{u} の尺度を同じにする必要は全くない: むしろ、理想的には各点における \mathbf{u} を表示したいのだから、矢印は無限小に縮めて描かなければならない。実際の図では、見やすいように、適切な縮小率で図示すること。

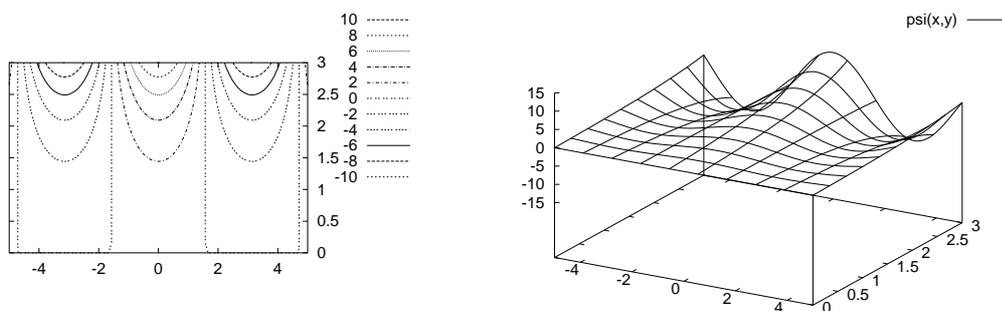


図 1: スカラー場 $\psi = \cos x \sinh y$ のグラフ: 左は等値線図、右は鳥瞰図

3 流体力学の方程式

今までの予備知識をもとに、流体における質量保存則 (連続の式)、および広義の運動量保存則 (**Euler** の運動方程式) をあらわす式を導く。関連するテーマとして、拡散方程式についても考察する。

⁷資料を <http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/> に用意してあるので参考にすること。

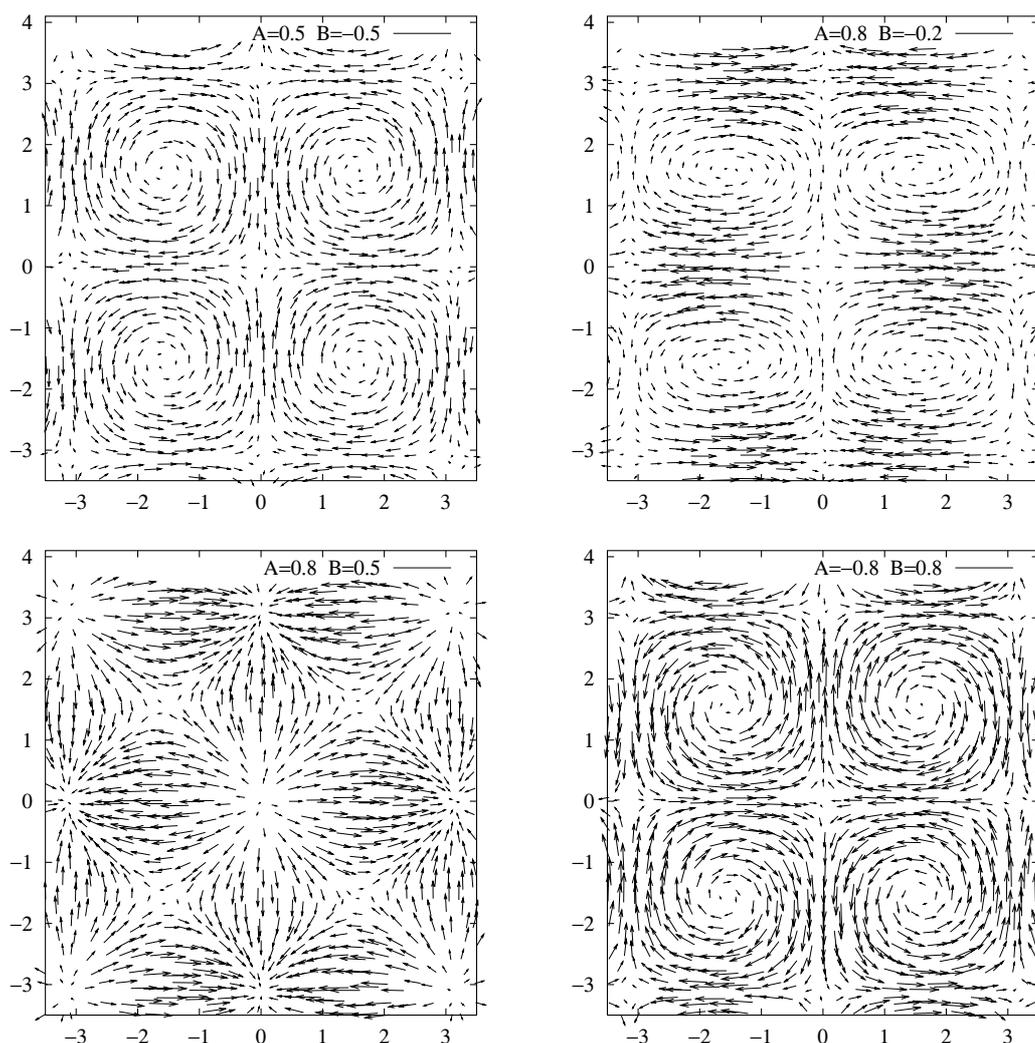


図 2: 式 (2.2) であらわされる流れ場の例

発表には時間制限を設ける。前半の課題 (§3.3 まで) および後半の課題 (§3.4–§3.6) について、それぞれ 90 分以内に説明を完了させること。時間切れになった場合には、場合に応じて補講またはレポート提出を指示する。

発表が終わったあと、指定された期日までに、§3.6 を (流れ場の図示まで含めて) レポートにまとめ、第 4 章のレポートと一緒に提出すること。

3.1 流体要素と物質微分: Lagrange 表示

流体の運動の記述には、**Lagrange** 表示と **Euler** 表示という、2つの見方がある。流体を分割して得られる微小要素に着目するのが Lagrange 表示であり、空間を分割して得られる領域に着目するのが Euler 表示である。流体に着目するか、空間に着目するかで、式の書き方が違ってくる。(もちろん、両者は相互に変換できる。)

簡単化のため、1次元に限定して、具体的な例を考える。流体は連続体であるが、これを細分化して多数の粒子 (流体要素) と見なし、 j 番目の要素の時刻 t における位置を $x = x_j(t)$ とする。要素の位置を要素番号と時刻の関数として与えれば、流体の運動が記述できる。

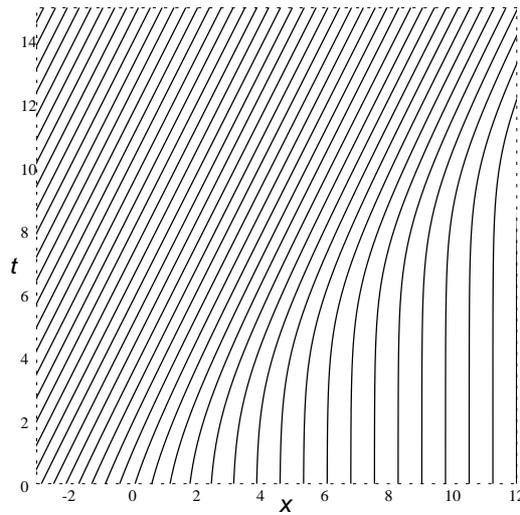


図 3: 式 (3.1) の流体要素の運動を (x, t) 面に表示したもの

例として、流体要素の位置を

$$x = x_j(t) = \lambda \ln \left(e^{j/N} + \sqrt{e^{j/N} (e^{j/N} + 2e^{\sigma t})} \right) \quad (3.1)$$

とした場合の運動を図 3 に示す。これは、 (x, t) 面における粒子の軌跡 (世界線) を図示したものである (ただし適当に無次元化してある)。個々の線が粒子 1 個を示す。

通常は、 $N \rightarrow +\infty$ の極限をとり⁸、流体を連続体として扱う。連続体記述では、粒子の位置そのものよりも、密度 ρ の分布を考えることが多い。Lagrange 表示では、粒子番号の代わりに物質座標 a を定義して、 $\rho = \rho(a, t)$ とあらわす。Euler 表示では、物質座標を用いず、空間座標 x に着目して、 $\rho = \rho(x, t)$ という場を考える。

さて、以下の例のうち 1 つを選択し (他の班が既に選択したものを除く)、密度 ρ の Euler 表示および Lagrange 表示を求めよ。それぞれの表示を用いて密度の **Lagrange** 微分を計算し、結果が一致することを確認せよ。また、可能ならば、図 3 と同様にして、流体要素の運動を図示せよ。

(あ) $x_j(t) = \frac{j\lambda}{N-j} (1 + B \sin \omega t) \quad (0 \leq j < N) \quad B \text{ および } \omega, \lambda \text{ は定数}$

(い) $x_j(t) = \frac{Nct + j\lambda}{N-j} \quad (0 \leq j < N) \quad c \text{ および } \lambda \text{ は定数}$

(う) $x_j(t) = \frac{\{(N+j)\lambda + Nct\}^2}{N^2\lambda} - \lambda \quad (0 \leq j < N', N' = AN) \quad A \text{ および } c, \lambda \text{ は定数}$

(え) $x_j(t) = \frac{\{(N+j)\lambda + Nct\}^3}{N^3\lambda^2} - \lambda \quad (0 \leq j < N', N' = AN) \quad A \text{ および } c, \lambda \text{ は定数}$

(お) $x_j(t) = \lambda \ln \left(e^\theta + \sqrt{e^{2\theta} - 1} \right), \quad \theta = \frac{j}{N} + \sigma t \quad (0 \leq j < N', N' = AN) \quad A \text{ および } \sigma, \lambda \text{ は定数}$

(か) $x_j(t) = \frac{j\lambda}{N} + \frac{N+jB}{N} Ct \quad (0 \leq j < N', N' = AN) \quad A \text{ および } B, C, \lambda \text{ は定数}$

⁸やかましいことを言えば、単に $N \rightarrow +\infty$ の質点系を考えるだけでは十分でない。連続体記述を得るには、隣り合った粒子どうしが一緒に運動すること、つまり、ほとんど至るところで密度や速度が物質座標または空間座標の連続関数になることが要請される。

$$(き) \quad x_j(t) = \frac{N}{N + B_j} (Ct + \lambda) \quad (0 \leq j < N', \quad N' = AN) \quad A \text{ および } B, C, \lambda \text{ は定数}$$

考え方

- 物質座標を $a = j/N$ で定義し、 $N \rightarrow +\infty$ の極限をとることにより、空間座標と物質座標を関係づける式 $x = x(a, t)$ を求める。
- 流体の密度 ρ を求めよう。流体粒子 N 個の質量を m とし、着目している空間領域 $\Delta V = S\Delta x$ に k 個の粒子が入っていたとする。すると、そこでの密度は、

$$\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k\mu}{\Delta V} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k\mu}{S(x_{j+k} - x_j)} \quad \left(\text{ここで } \mu = \frac{m}{N} \right)$$

を計算することによって求められる。(なぜこういう式になるのか、考えてみること。)

- 密度の Lagrange 表示 $\rho = \rho(a, t)$ から、 a を固定した時間微分

$$\frac{D\rho}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_a = \frac{\partial}{\partial t} \rho(a, t) \quad (3.2)$$

を求める。なお、 D/Dt は

$$\frac{D \cdot}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial t} \right)_a \quad (3.3)$$

によって定義され、これを物質微分あるいは **Lagrange** 微分と称する。

- Lagrange 表示に $a = a(x, t)$ を代入して整理すれば、密度の Euler 表示を求めることができる。また、速度は $x = x(a, t)$ から求めればよい。

Euler 表示では、公式

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \Delta t, x + u\Delta t) - \rho(t, x)}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.4a)$$

を用いて $D\rho/Dt$ を計算する。2次元以上の場合

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{u}\Delta t) - \rho(t, \mathbf{r})}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (3.4b)$$

となる。式(3.4a)を用いて Euler 表示で $D\rho/Dt$ を計算し、この結果が、Lagrange 表示による定義式(3.2)を用いた計算結果と一致することを確認せよ。

Lagrange 描像で与えられた1次元の流れについて、Euler 描像での流体の密度 ρ および速度 u を具体的に計算すると、これらは連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

に従うことを示すことができる。この結果を2次元以上の場合に拡張すると、 $\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial x}$ を $\text{div}(\rho \mathbf{u})$ で置きかえた式が得られる。これは、質量保存則(1.6)の微分形にほかならない。

3.2 拡散方程式: Euler 表示

Lagrange 描像では、保存則は式変形の結果として導出されるが、Euler 描像では、最初に保存則 (バランスの式) を仮定する必要がある。保存則の適用例として、物質の拡散する過程を記述する方程式、すなわち拡散方程式の導出を考えよう。

状況として、適当な物質 (塩とか砂糖とか) が流体中に空間分布しているとする。分布の様子を式であらわし、その時間変化を計算できるような方程式を導きたい。

物質の濃度分布を $c = c(x, t)$ という場であらわす。勝手な空間領域 V を考えると、 V のなかの物質の量は

$$Q = \int_V \square dV \tag{3.6}$$

で与えられる。また、境界をとおした物質の出入りを \mathbf{J} というベクトル場であらわすと、バランスの式は

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3.7}$$

のように書ける。

(1) 式 (3.7) を、微分形に書き直せ:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \square = 0. \tag{3.8}$$

(2) 次の手順に従い、拡散方程式(あるいは移流拡散方程式)

$$\frac{Dc}{Dt} = D\Delta c \tag{3.9}$$

を導出せよ。なお、左辺の D/Dt は式 (3.3) で定義される **Lagrange** 微分である。具体的に Lagrange 微分を計算するには、公式 (3.4) を用いればよい。

- バランスの式の微分形 (3.8) から出発する。
- 物質 (仮に塩だとする) の移動 \mathbf{J} を、 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d$ のように、2つの部分に分けて考える。
 - 物質が“流れに乗って”(すなわち流体の移動に伴って) 運ばれることを、移流(あるいは対流)という。流体の速度場を \mathbf{u} とし、これによる移流を \mathbf{J}_c と書くと、次の関係式が成り立つ:

$$\mathbf{J}_c = \square \mathbf{u}$$

ヒント: 時間 Δt のあいだに面 ΔS を通過する流体の体積をまず求め、これを塩の量に換算する。

- 拡散は **Fick** の拡散法則に従う:

$$\mathbf{J}_d = -D \text{grad } c \tag{3.10}$$

つまり、濃度勾配に比例して \mathbf{J}_d が生じる。

- 以上の結果を総合すると、流体中の拡散方程式が

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{u}) = D\Delta c \tag{3.11}$$

の形で得られる (ただし D は定数だとする)。あとは、非圧縮流体に関する連続の式 (3.14) を用いて方程式 (3.11) を書き直すと、方程式 (3.9) が得られる。

(3) 「SI 単位系による物理量 X の単位」を $[X]$ で示す: たとえば

$$[t] = \text{s}, \quad [x] = \text{m}, \quad [m] = \text{kg}$$

のように⁹。拡散係数 D について、その単位 $[D]$ を求めよ。

なお、熱伝導に関しても、塩や砂糖の拡散と似たような方程式が成り立つことが分かっている。すなわち、熱拡散係数を κ とすると、固体中の熱の移動は熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \tag{3.12}$$

に従う。流体中では、時間微分が D/Dt になる。

3.3 非圧縮条件

式 (2.2) で与えられる流れ場を考える。定数 A, B を適当に決めて速度場を図示すると、たとえば図 2 のようになる。

(1) 図 2 に示してある 4 つの流れ場のうち、非圧縮流体¹⁰では実現できない流れが 2 つある。どれが実現可能でどれが実現不可能か、直感的に考察せよ。

(2) 式 (2.2) の流れが非圧縮流体の流れとして実現できるためには、 A と B はある条件式を満たさなければならない。この条件式を、次のような手順で求めよ。

- 一般論として、流体の質量密度を ρ とし、質量保存則 (1.6) を微分形で書きなおす。
- 非圧縮流体¹¹では、次の式が成り立つ:

$$\rho(t + \Delta t, \mathbf{r} + \mathbf{u}\Delta t) = \rho(t, \mathbf{r}) \tag{3.13}$$

この式の意味を考えよ。

- 式 (3.13) と質量保存則 (微分形) を用いて、 \mathbf{u} に関する次の条件式 (非圧縮条件) を導く:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \tag{3.14}$$

- 式 (2.2) を非圧縮条件 (3.14) に代入し、 A と B が満たすべき条件式を求める。

(3) 図 2 に示されている 4 とおりの流れ場について、 $\text{div } \mathbf{u}$ を計算し、非圧縮流体の流れとしての実現可能性について考えよ。(i) $\text{div } \mathbf{u} > 0$ となる領域と $\text{div } \mathbf{u} < 0$ となる領域を色分けして図示せよ。(ii) それぞれの領域内に微小な領域を設定し、微小領域からの流体の出入りを考察せよ。

3.4 非粘性流体の運動方程式

ようやく流体の運動方程式を導く準備ができた。ただし、簡単化のため、1次元で考えることにする。

以下の方針に従って 2 つの異なる方法で流体の運動方程式を導き、両者が同じ結果になることを確認せよ。

(1) まず、§3.1 のような、流体要素に着目する方法 (**Lagrange** 描像) で考える。

⁹ここで m と \mathbf{m} は違う記号であることに注意。斜体のほうは質量、立体的ほうはメートルである。

¹⁰圧縮や膨張を許さない流体のこと。同じ意味で「非膨張流体」とも言えるはずだが、ふつうは「非圧縮流体」と言う。

¹¹必ずしも $\rho = \text{const.}$ だとは限らない。密度差のある非圧縮流れも存在する: たとえば、油と水から成る系を考えてみよ。

- 流体要素の運動方程式を

$$\mu \ddot{x}_i = F_{i-1 \rightarrow i} + F_{i+1 \rightarrow i} + \tilde{f}_i \quad (3.15)$$

とする。ここで $F_{i \rightarrow j}$ は流体要素どうしの間にはたらく力、 \tilde{f}_i は 外部から流体要素に直接はたらく力をあらわす。

- 流体要素 $i, i+1, i+2, \dots, i+k-1$ を足し合わせた運動方程式を求める:

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} (x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1}) = \boxed{\phantom{F_{i-1 \rightarrow i} + F_{i+1 \rightarrow i} + \tilde{f}_i}} + (\tilde{f}_i + \tilde{f}_{i+1} + \dots + \tilde{f}_{i+k-1}) \quad (3.16)$$

- 密度が $\rho = \mu k / (S\xi)$ (ただし $\xi = x_{i+k} - x_i$) で与えられることを用いると

$$[\text{式 (3.16) の左辺}] = \rho S \xi \frac{Du}{Dt}$$

ここで、時間微分に Lagrange 微分 (3.3) を用いることに注意 (その理由を考えよ)。

- 運動方程式 (3.15) の右辺は要素 1 個あたりの力なので、「面積あたり」または「体積あたり」に直す。まず、流体要素のあいだに働く力 (応力) を、面積あたりで表示する必要がある。今の場合、応力としては圧力だけを考えればよい。そこで、圧力 $p = p(x)$ を $F_{i-1 \rightarrow i} / S = p(x_i)$ によって定義する。さらに、外部から働く力を、体積あたりの力 f を用いて書き直し、次の式を得る:

$$[\text{式 (3.16) の右辺}] = S \{ p(x) - p(x + \xi) + \xi f \}$$

- 流体要素の間隔は非常に小さいとして、 ξ を微小と見なすと、式 (3.16) は (1次元) **Euler** 方程式になる:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f \quad (3.17)$$

(2) もう一つの考え方として、空間に固定された領域 $V = \{x \mid x_1 < x < x_2\}$ に着目し (**Euler** 描像)、速度場 $u = u(x, t)$ を用いて 運動量 ρu に関するバランスの式を書き下す。

- 時刻 t において領域 V に含まれる運動量を $\Pi(V, t)$ とする:

$$\Pi(V, t) = \int_V \rho(x, t) u(x, t) dV = \int_{x_1}^{x_2} \rho u S dx$$

- 運動量 $\Pi(V, t)$ は、力によって時間変化する (↑ §1.5 を見よ)。
- さらに、境界面をとおして出入りする流体が持ち込んだり持ち出したりする運動量を考えなければならぬ。出入りする流体の体積が $Su\Delta t$ であることを考えると、運動量に関するバランスの式が

$$\Pi(V, t + \Delta t) = \Pi(V, t) + \left\{ \boxed{} \Big|_{x_1} - \boxed{} \Big|_{x_2} \right\} S \Delta t + [\text{外力項}] \quad (3.18a)$$

または

$$\frac{d}{dt} \Pi = \dots \quad (3.18b)$$

のような形で書ける。式 (3.18) を具体的に書き¹²、これを微分形に書き直す:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = f \quad (3.19)$$

¹²式 (3.18a) でも式 (3.18b) でもどちらでも良いが、とにかく式の意味を考えることが重要である。

(3) 運動量のバランスの式 (3.19) は 1 次元 Euler 方程式 (3.17) と同値であることを、式変形によって示せ。

同様の考え方を 3 次元の流体に適用すると、Euler 方程式は次のようになることが示される:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{grad } p + \mathbf{f} \quad (3.20)$$

なお、運動量のバランスの式 (3.19) の 3 次元版は、 u^2 の部分がテンソル $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ になる¹³ので、少々やっかいである。そのため、運動量のバランスの式は、太字記号を用いずに添字記法で書くことが多い。具体的な形については、たとえば文献 [6, p.35] の式 (2.42) を見よ。

3.5 非粘性の 2 次元非圧縮流れ

流体の運動を支配する方程式 (3.20) が得られたわけだが、これを 3 次元で解くのは非常に難しい。そこで、以下の仮定のもとに、運動方程式 (3.20) を簡単化しよう:

- 流れは定常 ($\partial_t = 0$) で、かつ 2 次元的
- 流体の密度は一定 ($\rho = \text{const.}$)
- 外力は存在しない ($\mathbf{f} = 0$)

このとき、流れの支配方程式 [すなわち連続の式 (3.14) および運動方程式 (3.20)] は

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.21)$$

$$\rho (u\partial_x + v\partial_y) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} p \quad (3.22)$$

と書き直される。

(1) 方程式 (3.21) の一般解は

$$u = +\partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi \quad (3.23)$$

で与えられる¹⁴。式 (3.23) を方程式 (3.21) に代入し、たしかに解であることを確認せよ。

(2) 式 (3.23) を運動方程式 (3.22) に代入し、 p を消去して整理すると

$$\begin{vmatrix} \partial_x \nabla^2 \psi & \partial_x \psi \\ \partial_y \nabla^2 \psi & \partial_y \psi \end{vmatrix} = 0$$

のようになることを示せ。さらに、この方程式の解は

$$\nabla^2 \psi = c_0 + c_1 \psi + c_2 \psi^2 + \dots \quad (3.24)$$

によって得られることを示せ (代入して確認せよ)。

¹³ベクトルの積には、内積 (スカラー積)・外積 (ベクトル積) のほかに、テンソル積というものがあり、現代数学では \otimes という記号であらわす。ただし、 \otimes はしばしば省略される: つまり、 $\mathbf{a}\mathbf{b}$ と書いたら $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ のことで、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ のことではない。これが、内積の場合にドットの省略が許されない理由である。

¹⁴式 (3.23) は $\mathbf{u} = \text{rot}(\psi \mathbf{e}_z)$ と書ける。つまり、 $\psi \mathbf{e}_z$ は \mathbf{u} のベクトルポテンシャルである。

3.6 円柱を過ぎる非粘性の流れ

特に簡単な場合として、式(3.24)の右辺の $\{c_j\}$ がすべてゼロである場合を考える。これは、考察の対象を非回転流れ($\text{rot } \mathbf{u} = 0$ を満たす流れ)に限ることを意味する。このとき、解くべき方程式は

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{3.25}$$

すなわち **Laplace** 方程式に帰着する。

例題として、速度 U の一様流のなかに置かれた 半径 $D/2$ の円柱のまわりの流れを求めてみよう。流れは非回転流れであるものと仮定し、Laplace 方程式 (3.25) を解いて流れの様子を求めることにする¹⁵。

- (1) もし円柱がなければ $\mathbf{u} = (u, v) = (U, 0)$ すなわち $\psi = Uy$ である [式 (3.23) に代入し確認せよ]。
円柱の影響を考慮するため、定数 U を $F = F(r)$ で置き換えて

$$\psi = Fy \quad \left(\text{ただし } F = F(r), r = \sqrt{x^2 + y^2} \right) \tag{3.26}$$

と置く。式 (3.26) を Laplace 方程式 (3.25) に代入して整理すると、 F に関する 2 階の常微分方程式となることを示し¹⁶、その一般解を求めよ。

- (2) 前問 (1) の結果において、境界条件 (円柱表面および無限遠での \mathbf{u} の条件) を考慮して定数を定めよ。この結果に基づき、 \mathbf{u} を (x, y) であらわせ¹⁷。
(3) 求めた速度場 \mathbf{u} を図示せよ (GNUPLOT などを用いて正確な図を作成する)。なお、 $r < D/2$ の領域 (円柱の内部) は図から除くこと。

注意: ここで求めた解は、残念ながら、現実の実験 [8] とほとんど全く合わない。これは、流体の粘性が大きいためではない (たいていの場合、粘性そのものの値はむしろ小さい)。粘性の影響は間接的でしかなく、直接には、境界層が剥離して非回転の仮定 (3.25) が破れることが本質的である。逆に言えば、境界層が剥離しないような物体 (たとえば飛行機の翼など) では、粘性のない非回転流としての扱いは良い近似となりうる。

4 レポート課題: 「粘性のない流れ」

Feynmann 物理学¹⁸の「粘性のない流れ」(文献 [9] 第 19 章)を読み、他の文献(文献 [10] の第 7 章など)も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。このプリントの第 3 章との関連に注意すること。また、図はいいかげんに描くのではなく、なるべく正確な図を作ること。

- 流体の運動方程式 (連続の式・Euler の運動方程式)
- 定常流における Bernoulli の定理 (導出・物理的意味・関連する実験事実)
- 渦度と循環 (円柱を過ぎる流れ・Helmholtz の渦定理・渦輪の発生と運動)

このレポートと一緒に、§3.6 のレポートも忘れずに提出せよ。

¹⁵通常、2次元で Laplace 方程式 (3.25) を解くには 複素関数論を利用する [7, §4]。しかし、ここではあえて複素関数論を使わない解法を試みることにしよう。

¹⁶もし常微分にならないならば、そもそも式 (3.26) のように置いたのが失敗ということになる。

¹⁷この問題の意図は、段階を追って論理的に式を導出することにある。したがって、「円柱を過ぎる流れは $f = U(z + 1/z)$ 」などという公式を教科書から天下りの引張ってくるのは、ルール違反とする。

¹⁸誰かが勝手に持ち去っていない限り、4階の演習室にあるはずである。