

第II部

流体の運動を解析する

5 ベクトル解析の復習

5.1 ベクトル場の微分に関する公式

(1) ベクトル場 \mathbf{p}, \mathbf{q} が

$$\mathbf{p} = (x + 2y, xy, 1), \quad \mathbf{q} = (x^2 + 3y^2, xyz, 0)$$

のように与えられている。(i) $\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{q}$ を求めよ。(ii) $\mathbf{p} \cdot \text{grad } \mathbf{q}$ を求めよ。

なお、これらの計算については、補遺Dの注意を参照すること。

(2) ベクトル場 \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を計算せよ。結果を整理すると、 div を含む形できれいにまとめられる [11, p.75]。

(3) (i) スカラー場 f に対して

$$f \text{ grad } f = \frac{1}{2} \text{ grad } (f^2)$$

が成り立つことを示せ。(ii) この結果を、ベクトル場 \mathbf{f} に対して拡張せよ。

ヒント: $\mathbf{f} \cdot \text{grad } \mathbf{f}$ と $\frac{1}{2} \text{ grad } (f^2)$ は一般には等しくない。そこで、両者の差を計算してみると、 $\text{rot } \mathbf{f}$ を用いてきれいな形にまとめられることが分かる。

5.2 渦の流れ

典型的な渦流れは、おおよそ次のような速度分布を示す (図4を参照):

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = \begin{cases} (-by, bx, 0) & (\sqrt{x^2 + y^2} \leq a) \\ \left(-\frac{ba^2y}{x^2 + y^2}, +\frac{ba^2x}{x^2 + y^2}, 0 \right) & (\sqrt{x^2 + y^2} > a) \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで a, b は定数である。式(5.1)であらわされる渦のことを **Rankine** 渦という [10, p.18]。

(1) 回転流れを特徴づける量として、循環という量がある。循環 $\Gamma = \Gamma[C]$ は、閉曲線 C にそって

$$\Gamma[C] = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

を計算することにより求められる (補遺Bを参照)。

練習問題として、Rankine 渦 (5.1) に対し、次の閉曲線に関する循環 Γ を求めよ。

- (x, y) -平面上の、原点を中心とする半径 R の円周 (横軸に R , 縦軸に Γ をとって結果を図示)
 - $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (0, a, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ のような三角形
 - $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (a, a, 0) \rightarrow (0, a, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ のような四角形
- (2) (i) Rankine 渦 (5.1) における渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を計算せよ¹⁹。(ii) 渦度場を (x, y) 面上および (x, z) 面上に図示せよ。
- (3) ベクトル解析における **Stokes** の定理を用いて、渦度から循環を求めることができる。この方法で循環を計算し、線積分で直接求めた結果と一致することを確認せよ。

¹⁹行列式に頼らずに計算すること。補遺Dを参照せよ。

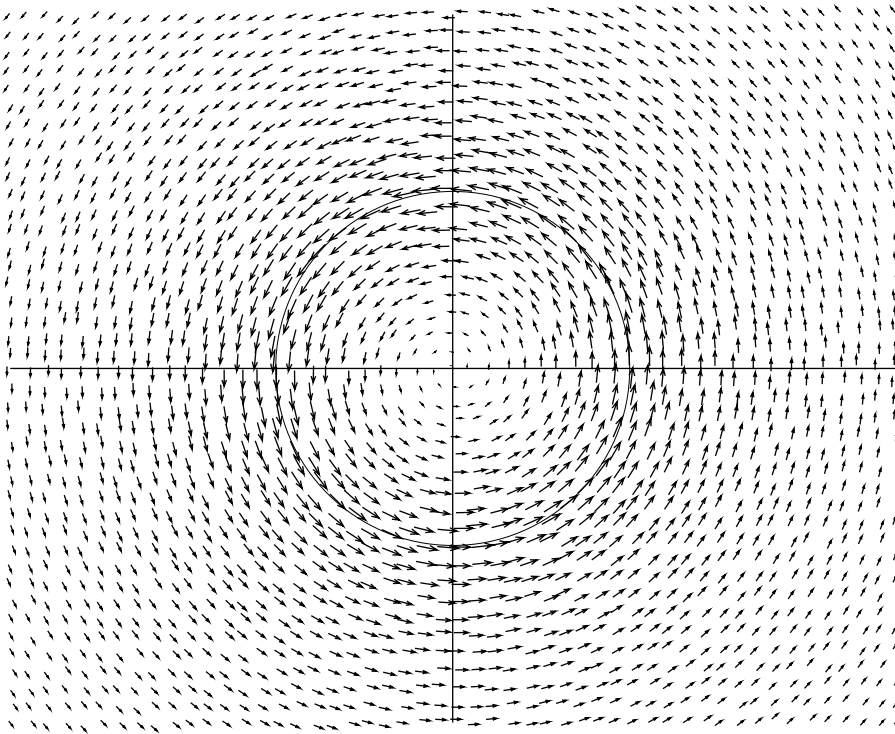


図 4: Rankine 渦による速度場 (5.1) の様子

注意: 式 (5.1) のような渦 (**Rankine 渦**) において、 $|\mathbf{r}|$ が大きいところでは $\boldsymbol{\omega} = 0$ となる。その意味で、遠方での流れは「非回転流れ」である。渦度がゼロなので「渦なし」とも言う。

もちろん、遠方の流れも渦巻き状ではあるが、だからといって「渦あり」だと思っはいけない。遠方の流体は中心部の渦に流されているだけであって、自分で自転しているわけではない。渦度というのは、流体要素の自転を示すものであって、公転を示すものではない。遠方の流体は、自転がゼロという意味で「渦なし」なのである。

6 微分方程式

次の問題 (1)(2) のどちらか片方について、個人ごとにレポートを作成し、提出せよ。なお、班のメンバーのうち、半数が問題 (1) を、他の半数が問題 (2) を選択するようにする。分けかたは事前に決めておくこと。

(1) ある状況において、壁の近くの流れは、

$$-\frac{du}{dY} \int_0^Y u dY = \frac{d^2u}{dY^2} \quad \left(\text{ただし } \int_0^Y u dY = \int_0^Y u(\tilde{Y}) d\tilde{Y} \right) \quad (6.1)$$

という方程式で与えられることが分かっている。方程式 (6.1) は、粘性流体の方程式である **Navier-Stokes** 方程式を、§7.14 に示すような考え方で書き直すことにより得られる。ここで Y は壁からの距離を示す変数であり、 u は壁に平行な流速である。境界条件として、

- 壁面上 ($Y = 0$) で $u = 0$ (粘着条件)
- 無限遠方 ($Y \rightarrow +\infty$) で $u \rightarrow U_0$

という条件を課す。しかし、このままでは手計算で解けないので、何らかの簡単化を考えたい。

(a) Navier-Stokes 方程式は偏微分方程式であり、式 (6.1) は常微分方程式である。両者の違いを説明せよ。

(b) 次のことを示せ:

(i) 方程式 (6.1) は、 $u = U_0$ という解をもつ。(ii) しかし、この解は、境界条件を片方しか満たさない。

(c) 式 (6.1) の左辺は u について 2 次なので、もしも u が小さいとすれば、左辺をゼロとおいても良いのではないかと考えられる。(i) この考えに基づいて式 (6.1) を簡単化し、解を求めよ。(ii) 求めた解が境界条件を満たすかどうかを検討せよ。

(d) たとえ u が小さくても、壁からの距離が大きければ、左辺の積分は無視できない。そこで、

$$\int_0^l u dY \simeq \int_0^l U_0 dY = U_0 Y$$

のように近似する。(i) この考えに基づいて式 (6.1) を書き直し、解を求めよ。(ii) 境界条件を用いて、解に含まれる任意定数を決定せよ。(iii) 求めた解を図示せよ。

(e) 暇な人のための課題: コンピュータを用いて、式 (6.1) の数値解を求めよ。結果を図示し、近似解と比較せよ。(ヒント: $u = df/dY$, $f(0) = 0$ と置くと、ふつうの微分方程式になる。あとは Fortran でプログラムを作るか、MATHEMATICA の NDSolve コマンドを使う。)

(2) 簡単な偏微分方程式の例として、拡散方程式 (3.9) の 1 次元版で、かつ、流れがない場合を考える:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (6.2)$$

(a) 式 (6.2) で $c = c_0 + \theta$ (ここで $c_0 = \text{const.}$) と置き、領域を $0 < x < \ell$, 境界条件を $\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\ell} = 0$ とする。変数分離法を用いて、式 (6.2) を 2 つの常微分方程式に分離せよ。分離定数は、境界条件を満たすように決定せよ。

(b) 分離した方程式を解いて、一般解を求めよ。

(c) 初期条件を

$$\theta|_{t=0} = F(x) = 0.8 \sin \frac{\pi x}{\ell} + 0.4 \sin \frac{2\pi x}{\ell} - 0.2 \sin \frac{3\pi x}{\ell} \quad (0 < x < \ell)$$

とした場合の解を求めよ。この結果を用いて、時間の経過とともに濃度分布が変化していく様子を図示せよ (GNU PLOT を用いる)。

(d) 暇な人のための課題: Fortran または C 言語を用いて、式 (6.2) の解を数値的に直接計算せよ。数値計算の結果を、前問 (c) の結果と比較せよ。

7 流体力学の方程式を解く

この章では、各グループごとに、3 つの課題について発表してもらう。

- 問題 7.1(渦度方程式) および問題 7.12(円柱を過ぎる流れ) を、必修課題とする。
- それ以外の問題から、どれか 1 つを選択する。ただし、他のグループが既に発表した問題は選択できない。

発表は「担当の学生が先生となって講義をする」という形式でおこなう。誰がどの問題のどの部分について発表するか、あらかじめ分担を決めて申告しておくこと。また、図示が必要な問題については、事前に GNU PLOT や MATHEMATICA など で正確な図を作成しておき、コピーして配布するようにする。

発表には時間制限を設ける。問題 7.1 は 45 分以内、問題 7.12 および選択課題は 60 分以内に説明を完了させること²⁰。時間の制約に応じて、ある程度まで説明を簡略化したり配布資料で代用したりしてもかまわない。制限時間以内に発表が完了しない者については、場合に応じて補講またはレポート提出を指示する。

選択課題については、発表が終わったあと、指定された期日までにレポートを作成して提出すること。(基本的に、第 8 章のレポートと一緒に提出してもらう予定である。)

²⁰ただし、10 月の末までは、必修課題は 60 分以内、選択課題は 75 分以内とする。

7.1 渦度方程式

この章は、ノートも本も見ないで、結果を暗記して説明すること。本を見たら減点する。

流体の運動方程式 (Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式) を変形し、渦度方程式を導く。簡単化のため、流体の密度 ρ は一定であると仮定する。

(1) 流体の粘性を無視し、流れは **Euler** 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{7.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} \tag{7.2}$$

に従うものとする。外力は重力だけだとすれば $\mathbf{f} = (0, 0, -\rho g)$ である。
下記の方針に従い、Euler 方程式を式変形して渦度方程式を導け。

- 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ を用いて、Euler 方程式 (7.2) の左辺を次のように書き直す:

$$[\text{7.2 の左辺}] = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \right\} \tag{7.3}$$

- 式 (7.3) を Euler 方程式 (7.2) に代入して整理し、圧力 p を消去することにより、渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \tag{7.4}$$

を導出する。

(2) 粘性を考慮する場合、Euler 方程式 (7.2) の代わりに、**Navier-Stokes** 方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{7.5}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{u} \tag{7.6}$$

を用いる必要がある (§7.7 を見よ)。Navier-Stokes 方程式から圧力 p を消去し、渦度拡散方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \tag{7.7}$$

を導出せよ。ただし、 η は定数だと仮定する。

(3) 渦度方程式 (7.4) あるいは渦度拡散方程式 (7.7) の一般解を求めるのは困難であるが、それでもいくつかの解が容易に求められる。特に

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi \tag{7.8}$$

のような流れでは $\boldsymbol{\omega} = 0$ (非回転流れ) であり、したがって式 (7.8) は渦度方程式 (7.4) の解のひとつであることを示せ (もちろん一般解ではない)。なお、 Φ を速度ポテンシャルと称する。

(4) さらに非圧縮条件を考慮し、 Φ の満たすべき微分方程式を求めよ。

7.2 水の波

非回転流れ ($\omega = 0$) は速度ポテンシャル Φ を用いて式 (7.8) のように表すことができる。水の波(水面重力波)に伴って生じる流れは非回転流れと見なせるから²¹、速度ポテンシャルを用いて簡単な考察をしてみよう。

- (1) 流れは (x, z) 面内に限られるものと仮定し、速度場を $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ とする。(i) 解を $\Phi = F(x)G(z)$ と置き、解くべき式を 2 つの常微分方程式に分離せよ。(ii) 分離定数を調整して、波長が λ になるようにせよ。
- (2) 水底を $z = -h_0$ 、水面を $z = 0$ 付近とする。水底での境界条件を与え、解 Φ を求めよ²²。
- (3) 速度場を求めて図示し、その特徴を論じよ。特に、 $\lambda \gg h_0$ (浅水波) および $\lambda \ll h_0$ (深水波) という両極端の場合について、水面での速度と水底での速度の違いを考察せよ [6, §7-3]。
 - 水面の水だけが動き、水底の水は静止しているのはどちらの場合か?
 - 水面の水の動きに連動して水底の水も一緒に根こそぎ動くのは、どちらの場合か?

7.3 浅水波

波長 λ に比べて水深 h_0 が比較的浅い場合を考えよう。このような場合の水の波を浅水波という。浅水波では、水面から水底まで水があたかも一体となって動くかのように考えて良い。したがって、次のような近似が成り立つので、解析が簡単になる:

- 速度 u は z にはよらず、 x と t だけの関数だと見なしてよい (もう少し正確に言うと、 $|\partial_z u| \ll |\partial_x u|$ なので $\partial_z u = 0$ と近似できる)。
- 垂直方向の速度 w は小さい (u に比べて無視できる)。

また、運動エネルギーが重力の位置エネルギーを超えてしまうほど大きな波は考えにくいので、

$$\frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 < \rho gh$$

が成り立つものとする²³。このとき、波の伝わりかたについてもう少し詳しく調べてみよう。

- (1) 水があるのは、 z 方向に関して言えば水底 ($z = -h_0 = \text{const.}$) から水面 ($z = \eta$) までである²⁴。水底からの水の高さは $h = h_0 + \eta$ である。また、計算の便宜上、 $y = \pm b/2$ に側壁があるとしよう。
 - (i) 領域 $x_1 < x < x_2$ にある水の量を M として、 M を

$$M = \rho b \int_{x_1}^{x_2} \boxed{} dx \tag{7.9a}$$

のような積分であらわせ。

- (ii) さらに $x_2 - x_1 = \Delta x$ として、上記の積分を

$$M \simeq \boxed{} \Delta x + O(\Delta x^2) \tag{7.9b}$$

の形に書き直せ。

- (iii) 水量 M の時間変化を考え、さらに $\Delta x \rightarrow 0$ とすることにより、“質量保存”をあらわす式²⁵を導け:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \tag{7.10}$$

²¹ 粘性の影響は、通常、水底の境界に接する薄い層状領域 (境界層) にのみ現われ、それ以外の部分ではほぼ完全に無視できる。

²² さらに解の時間発展を考察するには表面での境界条件が必要だが、一般的な場合を考察するのは少し難しいので省略し、浅水波の場合に限って §7.3 以降で考察する。

²³ 特に、振幅の小さい波では $\rho |\mathbf{u}|^2 / 2 \ll \rho gh$ が成り立つ。

²⁴ 粘性係数を示す η と混同しないように注意。

²⁵ 式 (7.10) は 1 次元での圧縮性流体に対する連続の式 (3.5) に似ていることに注意しよう。

- (2) (i) Euler 方程式 (7.2) の z 成分を書き出し、浅水波近似および他の前提条件を考慮して方程式を簡単化する。これにより、圧力 p が

$$p = p_0 + \rho g(\eta - z) = p_0 + \rho g(h - h_0 - z) \quad (7.11)$$

で与えられることを示せ。(ii) Euler 方程式の x 成分を抜きだし、これに浅水波近似および式 (7.10), (7.11) を組み合わせて、運動量保存の式を h と u で書きあらわせ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x} \boxed{} = 0 \quad (7.12)$$

- (3) 方程式 (7.10) と (7.12) を連立させたもの²⁶が、浅水波の時間発展を記述する方程式である。簡単な例題として、一定水深 h_0 の近傍での微小振幅波

$$h = h_0 + \epsilon \tilde{\eta}, \quad u = \epsilon \tilde{v}; \quad |\epsilon| \ll 1 \quad (7.13)$$

を考える。これを式 (7.10)(7.12) に代入して解を求め、微小振幅波の様子を図示せよ。なお、以下では、面倒なので \sim を省略する。

- 式 (7.13) を浅水波の方程式に代入し、 ϵ が微小であることを用いて、方程式を線形化せよ。
- 解の形を

$$\eta = \eta(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \xi = x - ct$$

と置いて代入し、解くべき方程式を行列の固有値問題に帰着させよ。

- 初期条件を適当に仮定して (たとえば $\eta|_{t=0} = \cos kx$)、解を具体的に求め、時空間における解の挙動を図示せよ。(たとえば、横軸に x , 縦軸に t をとり、 $\eta = \eta(x, t)$ の等値線図を示せばよい。) また、定数 c の意味を説明せよ。

7.4 跳水の形成過程

浅水波の方程式を §7.3 で考えた。この方程式を用いて、跳水(段波)の形成過程を考察しよう。跳水とは、津波やボアなど、階段状の水面をもつ波のことを言う。気体力学でいえば衝撃波に相当する。

ここでは、初期波形を

$$h|_{t=0} = H(x) = h_0 - A \tanh \frac{x}{\lambda} \quad (A > 0) \quad (7.14)$$

とする。この波が段波に変わっていく様子を調べてみよう。

- (1) まず、§7.3 に従い、浅水波の方程式 (7.10)(7.12) を導出せよ。これらの方程式を、行列 A を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

の形に書き直せ。

- (2) 行列 A に対し、 $\mathbf{p}A = a\mathbf{p}$ を満たす横ベクトル \mathbf{p} および スカラー a を求めよ。その結果を

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\pm} = \begin{bmatrix} \alpha_{\pm} & \beta_{\pm} \end{bmatrix}$$

²⁶どちらの式も保存則 (↑ §1.4) であることに注意しよう。

とし、さらに、

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} = \alpha_+ \frac{\partial h}{\partial t} + \beta_+ \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} = \alpha_- \frac{\partial h}{\partial t} + \beta_- \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (7.16)$$

を満たす r_{\pm} を求めよ。

(3) 式 (7.15) と式 (7.16) を組み合わせて、次の式を導け:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] r_+ = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] r_- = 0; \quad u = u(r_+, r_-), \quad c = c(r_+, r_-). \quad (7.17)$$

(4) 初期条件を、式 (7.14) および $r_-|_{t=0} = 0$ で与えられるものとする。下記の方針に従い、水面 $h = h(x, t)$ の時間変化の様子を図示せよ。

- 初期に $r_- = 0$ である限り、いつまでも $r_- = 0$ である。このことを用いて、式 (7.17) から h, x, t 以外の変数を消去する。
- 「 x を与えて h を決める」という発想を逆転し、 $x = x(h, t)$ の形で解を求める。前問の結果から

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_h = \frac{\partial}{\partial t} x(h, t) = [t \text{ を含まない式}] \quad (7.18)$$

という方程式が得られるので、あとは両辺を t で積分すれば 解 $x = x(h, t)$ が得られる。

- 初期条件 $h(x, 0) = H(x)$ を利用して積分定数を定める。
- 時刻を $t = 0$ からはじめて少しずつ変化させながら、各時刻における水面の波形を図示する。

注意: ここでの解析結果では、 $\partial h / \partial x$ が無限大になったり負になったりするが、これは理論が簡単すぎるためである。実際には、そのようなことが生じる前に、流れが部分的に乱流になったり、浅水波理論で無視した加速度項の影響が現われて波が複数の山に分かれたりする²⁷。

7.5 定常進行する跳水

階段型の波形を保ったまま定常的に進行する跳水 (段波) を考える [12, §100]。この跳水の進行速度 c と水面の段差の関係を求めてみよう。

(1) §7.3 に従い、浅水波の方程式 (7.10)(7.12) を導出せよ。これらの方程式が、両方とも保存則をあらわしていることを説明せよ。

(2) 波形を保ったまま速度 c で進行する跳水を考える。状況は次のようになっているとする:

- 跳水が、右側の静止した水域 ($u = 0, h = h_1$) に向かって速度 c で進んでいる。
- 跳水の左側の水域では $u = u_2 \neq 0, h = h_2 > h_1$ である。

右側および左側での水面の高さ (h_1, h_2) は既知であるとして、次の方針に従い、 $u_2 = u_2(h_1, h_2)$ および $c = c(h_1, h_2)$ を求めよ。

- 跳水とともに一定速度 c で進む観測者を想定する。この観測者から見た運動方程式は、静止系での運動方程式と全く同じであるが、速度や位置などは適当に変換しなければならない (**Galilei 変換**)。
- もしも跳水が定常進行しているならば、観測者にとって、流れは全く定常に見えるはずである。この条件が満たされるように、 h_1, h_2, u_2, c のあいだに成り立つべき関係式を求める。
- 求めた関係式を c および u_2 について解く。

(3) 上記の結果において、 $(h_2 - h_1) / h_1 \rightarrow +0$ の極限を求めよ。このときの c の極限値を c_1 とする。

(4) 横軸に h_2 / h_1 , 縦軸に c / c_1 および u_2 / c_1 を取り、結果を図示せよ。このグラフから分かることは何か?

²⁷いわゆる分散性のことである。気体の場合と違って、水の波では、パルス状の定常進行波が存在し、ソリトンと呼ばれている。

7.6 音波の方程式

圧縮性流体では、圧力変動が有限の伝播速度で流体中を伝わる現象が見られる。特に、微小な圧力変動が伝わる現象を音波という。流体の方程式を用いて、音波の伝わりかたを調べてみよう。

(1) 次の方針により、音波が波動方程式

$$\partial_t^2 p - a^2 \partial_x^2 p = 0 \quad (7.19)$$

に従うことを示せ。ただし、簡単化のため、1次元で考える。

- 気体の運動は、連続の式、Euler 方程式、および

$$p = p(\rho) \quad (7.20)$$

に従うものとする。

- 微小な圧力変動と、それに伴う微小な密度変動・速度変動を考え、

$$p = p_0 + \epsilon p_1, \quad \rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots, \quad u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$$

とする。これを各方程式に代入して ϵ のべきで展開し、 ϵ は小さいとして $O(\epsilon^2)$ の項を無視する。

- 圧力以外の変数を消去し、1本の方程式にまとめる。

(2) 適当な係数 A を用いて $r_{\pm} = u_1 \pm A p_1$ とおき、 r_{\pm} が次の式を満たすようにせよ:

$$(\partial_t \pm a \partial_x) r_{\pm} = 0 \quad (7.21)$$

(3) 初期条件を

$$u_1 = 0, \quad p_1 = \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) \quad (\lambda \text{ は定数})$$

とする。(i) まず r_{\pm} を求め、時空間における挙動を図示せよ (横軸に $\tilde{x} = x/\lambda$, 縦軸に $\tilde{t} = at/\lambda$ をとり、 $r_{\pm} = r_{\pm}(\tilde{x}, \tilde{t})$ の等値線図を示す)。(ii) この結果から p_1 を求め、適当な時刻における圧力場を図示せよ。

(4) 音速 a を計算するには、関係式 (7.20) の具体的な形が必要である。標準状態における空気を想定し、以下の2つの仮定にしたがって、それぞれ音速を計算してみよ。どちらが実際の測定値に近い結果が出るか?

- 等温変化: $T = \text{const.}$ (温度一定)
- 断熱変化: $S = \text{const.}$ (エントロピー一定)

ヒント: 前者の場合は、式 (E.3) がすでに $p = p(\rho, T)$ の形なので、あとは T を定数と見なすだけでよい。後者の場合は、補遺 E の式 (E.2) を用いて T を消去し、 $p = p(\rho, S)$ の形の式を導く。

7.7 速度勾配と粘性応力

流体運動において粘性が完全に無視できるのは例外的な場合である。ふつうは粘性の影響が無視できないので、粘性を考慮した流体の運動方程式が必要になる。そのような方程式を導くには、§3.4で応力を扱っている部分を修正し、圧力に加えて粘性応力を含めればよい。ふつうの流体²⁸では、粘性応力は $\partial_x u, \partial_y u, \text{etc.}$ (速度勾配) の線形結合に比例する。さらに、対称性の考察 [13, §1-9] あるいは統計力学的な理論 [14, p.454] から粘性応力の形が決定され、**Navier-Stokes** 方程式が導かれる。

まずは、2次元の例で、速度勾配 (特に伸縮変形) について考察する。そのあとで、3次元の非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (7.6) を書き下すことにしよう。

²⁸ 水や空気や水飴など、低分子より成る流体が該当する。逆に言えば、血液や澱粉糊やマヨネーズは対象外である。

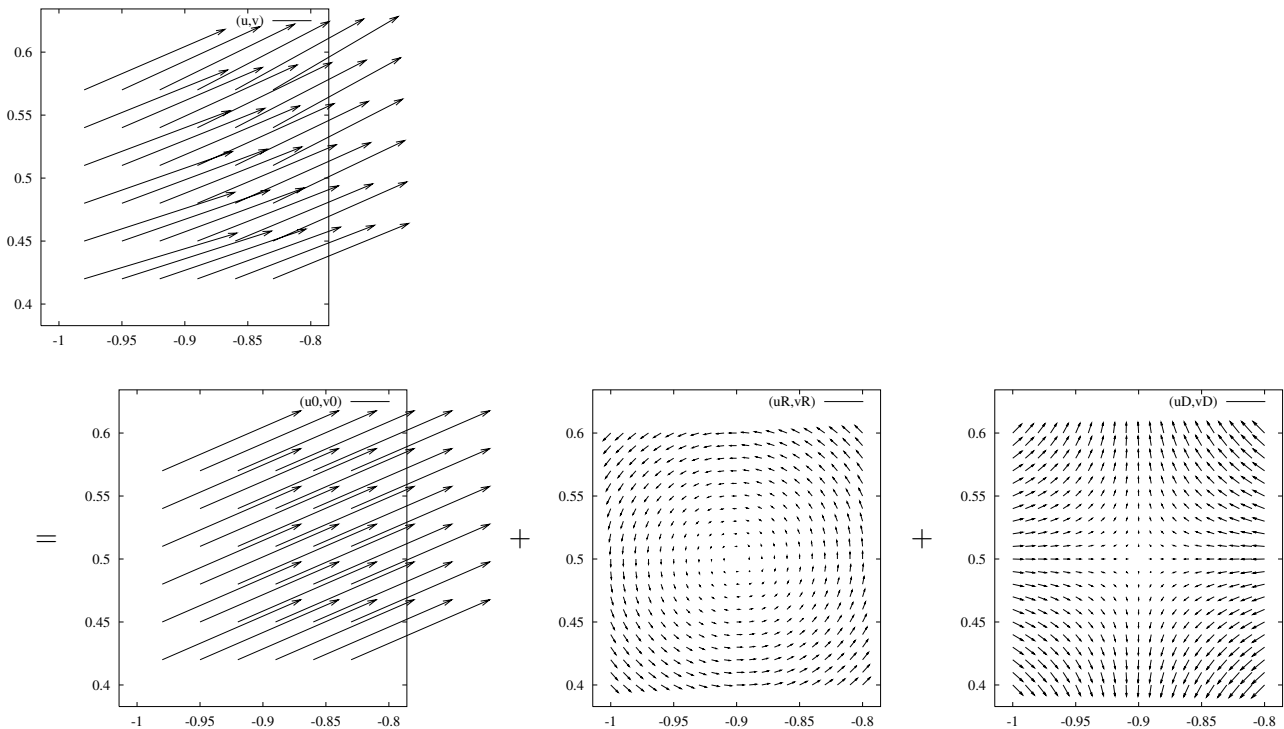


図 5: 流れを並進と回転と伸縮変形に分ける: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D$

(1) 第 1 の例として、式 (2) で与えられる速度場 \mathbf{u} を考える (図 2 を見よ)。この速度場を、適当な点の近傍で、並進 \mathbf{u}_0 と回転 \mathbf{u}_R と伸縮変形 \mathbf{u}_D とに分解せよ。参考のため、分解した結果の一例を図 5 に示す。

- まず、一点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ に着目し、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (X, Y)$ とおく。
- (X, Y) は微小だとして、 \mathbf{u} を Taylor 展開する。この展開の 1 次項の係数が速度勾配である。
- 展開した結果をうまく変形して、次の形に書き直す:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_D; \quad \mathbf{u}_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega Y \\ +\omega X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} aX + bY \\ bX + cY \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

ここで ω, a, b, c は もちろん定数であり、 \mathbf{u}_0 は定数ベクトル、 S は定数行列である。

(2) 第 2 の例として、静止した壁と運動する壁のあいだの狭いすきまにはさまれた流体の運動 (Couette 流) を考えよう²⁹。静止している壁の位置を $y = 0$ 、動いている壁の位置を $y = H$ とし、壁の速度を $\mathbf{U} = (U, 0)$ とする。このとき、壁によって駆動される粘性流体の速度は、次の式で与えられる:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\gamma} = \frac{U}{H} = \text{const.} \quad (7.23)$$

第 1 の例の場合と同様に、式 (7.23) で与えられる流れを 並進 \mathbf{u}_0 と回転 \mathbf{u}_R と伸縮変形 \mathbf{u}_D とに分解せよ。さらに、図 5 と同様に、結果を図示せよ。

(3) 上記のそれぞれの例に対して、行列 S の固有ベクトルを求めよ。その結果を利用して、次の式を導け:

$$\mathbf{u}_D = \tilde{X}_1 s_1 \mathbf{p}_1 + \tilde{X}_2 s_2 \mathbf{p}_2, \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \tilde{X}_1 \mathbf{p}_1 + \tilde{X}_2 \mathbf{p}_2 \quad (7.24)$$

²⁹たとえば、軸受けのまわりの潤滑油の流れや、ハードディスクとヘッドのあいだの気体の流れを想定せよ。

この結果と \mathbf{u}_D の図を比較し、項 $\tilde{X}_1 s_1 \mathbf{p}_1$ および $\tilde{X}_2 s_2 \mathbf{p}_2$ の物理的意味を考えよ。

(4) 以下、3次元で考える。次の方針により、非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (7.6) を導け:

- 運動量のバランスの式 (3.19) の3次元版を、粘性応力 τ'_{ij} を考慮して書き下す。
- 非圧縮流体の場合、粘性応力は

$$\tau'_{ij} = 2\eta S_{ij} \quad \left(\text{ただし } 2S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.25)$$

という比較的簡単な式で与えられる³⁰。これを運動量のバランスの式に代入する。

- さらに、 η は定数であるものとし、非圧縮条件 (3.14) を用いて式を簡単化する。

7.8 熱伝導

粘性流体の方程式である渦度拡散方程式 (7.7) は、ある意味で、拡散方程式 (3.9) あるいは熱伝導方程式 (3.12) によく似ている。そこで、粘性流体の問題にとりかかると前に、熱伝導の問題を解いてみよう。簡単化のため、1次元の問題を考え、また流れは存在しないものと仮定して、熱伝導方程式 (3.12) を書き直す:

$$\partial_t T = \kappa \partial_x^2 T. \quad (7.26)$$

この式は、もちろん、1次元拡散方程式 (6.2) と同じ形になる。

問題設定は次のようにしよう:

- 長い鉄の棒があって $0 < x < +\infty$ の範囲を占めている。
- 時刻 $t = 0$ までは、この棒の温度は一様 ($T = T_0 = \text{const.}$) であった。
- 時刻 $t = 0$ において、棒の端を 温度 $T_w (= T_0 + T_1)$ の壁に接触させ、そのまま放置する。この壁にはヒーターか何かが仕込んであり、壁の温度は常に T_w に保たれているので、棒の一端 ($x = 0$) の温度は常に T_w であり、ここから x 軸にそって熱が伝わっていくことになる。

この鉄棒における温度分布が時間とともに変化する様子を、1次元熱伝導方程式 (7.26) を用いて考察しよう。

(1) 問題の設定を図解せよ。

(2) 次の方法にしたがって、方程式 (7.26) の初期値・境界値問題の解を求めよ。

- 解の形を $T = T_0 + T_1 f(s)$, $s = \text{const.} \times \kappa^\alpha x^\beta t^\gamma$ と仮定する。こういう解が本当に存在するならば、 s はちょうど無次元の変数になるはずである。この条件をみたすように α, β, γ の値を定める³¹。
- 連鎖則を用いて $\partial/\partial x$ および $\partial/\partial t$ を d/ds であらわす (補遺 F を参照)。
- 熱伝導方程式を s を用いた形に書き直す (これで常微分方程式になれば成功である)。これに合わせて境界条件も書き直す。
- この常微分方程式を解いて f を求める (補遺 G を参照せよ)。
- 最終的に、温度場 T を 時間 t と空間座標 x の関数として求める。

(3) 次に、温度場の空間変化および時間変化の様子を示すため、結果を図示せよ。

- 時刻 $t = t_0 (> 0)$ での温度場を図に描く (GNU PLOT などを用いて正確な図を作ること)。
- 同様に、 $t = t_1 = 4t_0$ での温度場を図に描き、時刻 $t = t_0$ での温度場と比較する。

³⁰ 圧縮性流体の場合については、適当な教科書 (文献 [15, p.58] など) を見よ。また、粘性係数を η でなく μ であらわすことも多い。

³¹ 任意定数が残る場合は、 $\beta = 1$ となるように決めるとあとの計算が楽になる。

- (4) 壁の近くには、 $T > T_w - T_1/2$ となるような高温領域が存在する。高温領域の端を $x = x_H$ とし、 x_H を t の関数として求めよ。この結果を用いて、時間の経過とともに高温領域がしだいに広がっていく様子を図示し (GNU PLOT を用いる)、説明せよ。

7.9 平面 Poiseuille 流

Navier-Stokes 方程式 (7.6) を手計算で解くことを考える。あるいは、その変形版である渦度拡散方程式 (7.7) を代わりに解いてもよい。

ここでは、静止した壁をもつ狭い流路を流体がまっすぐに流れる場合 (**Poiseuille 流**) を考えよう。流体は、 $y = 0$ および $y = b (> 0)$ にある 2 枚の平面壁にはさまれた狭い流路を、 x 方向にまっすぐ流れている。外力はゼロであり、流れは定常である。壁の端のことは考えない。また z 方向のことも考えない。

- (1) 水路の様子を図解せよ。
 (2) 次の方針に従って方程式を簡単化せよ。

- まず連続の式から $\partial_x u = 0$ を示す。
- 渦度 ω に対して $\partial_x \omega = 0$ を示す。これを用いて、渦度拡散方程式 (7.7) を簡単化する:

$$\partial_y^2 \omega = 0 \tag{7.27}$$

- (3) 簡単化された渦度方程式 (7.27) の解を求め、これと

$$\text{壁面上で } \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7.28}$$

という条件 (粘着条件³²) から速度場 \mathbf{u} を求めよ。解は、なるべく無次元の変数 $(X, Y) = (x/b, y/b)$ を用いてあらわすようにすること。

以下では、ここで求めた解を $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ とし、また $U_0 = \max |\mathbf{U}|$ とする。

- (4) 解 $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ に対して、渦度 $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ を求め、図示せよ。
 (5) 時刻 $t = 0$ において、 $x = 0$ の位置にある流体に、インクか何かで印をつけた。時刻 $t = 0$ では、インクは長さ b の線分として観察される。この線分が、時間の経過とともにどのように変形するか、説明せよ。ただし、インクの拡散は無視する。
 (6) 条件によっては、上記で求めたような乱れの無い流れ (層流) は不安定になってしまい、実現できない。
 (i) 流れの安定性を調べるため、微小攪乱を加えて

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + (\tilde{u}, \tilde{v}, 0), \quad \omega = \text{rot } \mathbf{U} + (0, 0, \tilde{\omega})$$

と置き、渦度方程式 (7.27) に代入して、攪乱の支配方程式を導け。

- (ii) 非圧縮条件を考慮して

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (+\partial_y \tilde{\psi}, -\partial_x \tilde{\psi})$$

と置き、さらに $\tilde{\psi} = e^{st} E(X) F(Y)$ のように置いて、上記の結果を変数分離する。この方針により、攪乱の“モード”を定める常微分方程式 (**Orr-Sommerfeld 方程式**) を導け。パラメータとして **Reynolds 数** が現われることを指摘せよ。

³²粘着条件が多数の場合に成り立つというのは実験事実である。たとえば、コーヒーに少しだけクリームを入れ、スプーンでかきまぜて観察してみると良い。あるいは、実験の写真 [16, p.114] を見よ。ただし、気体では多少のすべりが生じる場合があると言われている。また、気体と液体の界面が固体壁と交わる場所でも、粘着条件は破綻する。

7.10 円管 Poiseuille 流

円管のなかを流体がまっすぐに流れる場合を考える³³。

- (1) 系の設定の概要を図解せよ。
- (2) 円管に合わせて、座標を円筒座標に直す。
 - (i) ふつうの座標 (x, y, z) —Descartes 座標—と 円筒座標 (r, θ, ζ) のあいだの関係式が

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \zeta) \tag{7.29}$$

であるとして、 $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\zeta$ を $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ で表せ。

[注意: 演算子を含む計算では順番を勝手に変えてはいけない。 $e^{-x^2} \partial_x \phi$ と $\partial_x e^{-x^2} \phi$ は異なる!]

(ii) 上記の関係式を逆に解いて³⁴、 $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ を $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\zeta$ で表わせ。

- (3) 細い管³⁵では、次のような仮定をおくことができる:

- 流れは常に軸に平行であり、 $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z は軸方向の単位ベクトル) とおける
- 流れは定常かつ軸対称

さらに、外力 \mathbf{f} はゼロだとする。このような仮定のもとで、Navier-Stokes 方程式 (7.5)–(7.6) を円筒座標に書き直せ (明らかにゼロになるような項は省略すること)。

- (4) 解くべき方程式を

$$[r \text{ によらない項}] = [z \text{ によらない項}]$$

の形に変形し、2つの常微分方程式に分離せよ。さらに、分離した方程式を解いて速度 u を求めよ。ただし壁面 ($r = a$) では粘着条件を課す。

- (5) (i) 速度場を (z, r) 面内のベクトル場として図示せよ。(ii) (x, y) 面における速度の等値線を図示せよ。
- (6) 管の断面を通る単位時間あたりの体積流量 Q を求めよ。他の条件を一定にして a を変えたとき、 Q はどのように変化するか? (これが **Hagen-Poiseuille** の法則³⁶である。)
- (7) 内径 $a = 0.4 \text{ mm}$ 、長さ 15 cm の毛細管に水をとおす。(i) 3分で 100 ml の水をとおすために必要な圧力を計算せよ。(ii) この圧力を水深に換算するとどれくらいになるか? (物理学実験の授業で水の粘性係数を測ったことのある人は、自分の経験と一致しているかどうか検討すること。)

7.11 斜面上の液膜流

斜面上を重力によって流れる薄膜状の非圧縮流体の運動 (液膜流) を考える [7, p.289]。

- (1) まず、流れが定常であり、液膜の厚さが一定値 h である場合を考える。次の手順によって、速度場が

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \frac{(g \sin \beta) h^2}{2\nu} \left\{ \frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \tag{7.30}$$

で与えられることを示せ。式 (7.30) を **Nusselt 解** という。

³³ 管のなかの流れは、応用上きわめて重要である。我々の周囲でどれだけ多くの管が使われているか、考えてみよう。

³⁴ 連立方程式を解く際に、割算をなるべく避けるためには、代入法よりも加減法を用いるほうが良い。

³⁵ 太い管では、(入口付近で精密な制御をおこなって攪乱を取り除くようにしない限り) 以下の仮定が成り立たない。これは、流れが不安定になり、乱流が生じるためである。どれくらい細ければよいかは流速と粘性に依存する。このことを発見したのが、有名な Reynolds の実験 [6, §8-1] である。

³⁶ 土木学者 Hagen と医学者 Poiseuille は、実験によってそれぞれ独立にこの法則を発見した。なお、文献 [17, pp.31-36] のように、複雑な計算をすべて省略し、次元解析を用いていきなり Hagen-Poiseuille の法則を導く方法もある。

- 水平面に対する斜面の傾斜角を β とする。斜面を下る方向に x 軸をとり、法線方向に y 軸をとると、速度および外力項は

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \rho g \begin{bmatrix} +\sin \beta \\ -\cos \beta \end{bmatrix}$$

とあらわされる。これを Navier-Stokes 方程式 (7.6) に代入し、成分で書き直す。

- 連続の式を用いて $\partial_x u = 0$ を示す。これを用いて、Navier-Stokes 方程式を簡単化する。
- 境界条件 $p|_{y=h} = p_0$ を考慮し (ここで p_0 は大気圧)、 p を求める。
- 速度については、壁面 ($z = 0$) では粘着条件を課し、表面 ($y = h$) では剪断応力がゼロという条件

$$\tau_{xy} = 0 \tag{7.31}$$

を課す。ここで $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ であり、 τ'_{ij} は式 (7.25) で与えられる。これらの条件を考慮して速度 \mathbf{u} を定める。

(2) 次に、 h が完全に一定ではなく、ゆるやかに変化する場合を考える。表面の勾配 $|\partial h/\partial x|$ が微小であれば、近似的に Nusselt 解 (7.30) が適用できる。

(i) 式 (7.10) と同様に考えて

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{7.32}$$

という式が成り立つことを示し、 Q を h であらわせ。(ii) 式 (7.32) から Q を消去し、次の式を導け:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + C \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad C = C(h) \tag{7.33}$$

(3) 初期条件を

$$h|_{t=0} = h_0 - A \tanh \frac{x}{\lambda} \tag{7.34}$$

とする (ただし $A > 0$)。下記の方針に従い、表面 $h = h(x, t)$ の時間変化の様子を求めて図示せよ。

- 「 x を与えて h を決める」という発想を逆転し、 $x = x(h, t)$ と考えてグラフを描くことにする。
- 初期条件 (7.34) を h について解き、 $x|_{t=0}$ を求める。
- 式 (7.33) を式 (7.18) の形に書き直す。
- 初期条件を考慮して $x = x(h, t)$ を決定する。
- 時刻を $t = 0$ からはじめて少しずつ変化させながら、各時刻における表面の波形を図示する。

注意: もちろん、この解析結果は近似的なものにすぎない。理由は、時間とともに波形が変化し、それにつれてしだいに $|\partial h/\partial x| \ll 1$ という条件が成り立たなくなるからである。その後の波形を決める要因としては、慣性の効果と表面張力の効果が本質的であり、その結果、特徴的な「さざ波」を伴うパルス状の波が形成される。

7.12 円柱を過ぎる遅い流れ: Stokes 近似

問題 3.6 と同じような状況の流れを、こんどは、粘性を考慮した方程式によって解析してみよう。出発点としては、渦度拡散方程式 (7.7) を用いる。また、§3.5 と同様に、流れは 2 次元であると仮定する。

(1) 今の場合、渦度拡散方程式 (7.7) は

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (7.35)$$

のように簡単化されることを示せ。

(2) 次のことを示せ³⁷:

(i) 問題 3.6 で求めた解は、方程式 (7.35) を満たす。(ii) 残念ながら、この解は、物体表面での粘性流体の境界条件 (粘着条件) を満たさない。

(3) 式 (7.35) の左辺は、 \mathbf{u} に関して 2 次である。したがって、もし \mathbf{u} が小さければ、左辺をゼロと見なして解を求めることが考えられる。これが **Stokes** 近似である。

次の方針に従い、Stokes 近似による式 (7.35) の解を求めよ。

- 方程式を極座標で書き直す。
- 無限遠で $\omega \rightarrow 0$ という条件のもとで一般解を求める。
- 流れ関数 ψ を式 (3.26) のように仮定し、これから渦度 ω を計算して、これを上の結果と等置する。
- 速度場を求める。
- 物体表面での境界条件を考慮して、係数を定める。

(4) 求めた解は、残念ながら、遠方での境界条件を満たさないことを示せ。したがって、この解は、円柱の近傍でしか有効でない³⁸。

(5) 渦度 ω および流れ場 \mathbf{u} を図示せよ (GNUPLOT または MATHEMATICA を用いる)。また、粘性がない場合 (§3.6) の結果を図示し、今回の結果と比較せよ。

7.13 円柱を過ぎる遅い流れ: Oseen 近似

Stokes 近似は、物体の近くでしか成立しないので、無限遠での境界条件をあてはめて解を確定することができない。そこで、近似を改良しよう。左辺を完全に無視するのではなく、遠方での一様流を考慮して

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \simeq U \partial_x$$

と近似する (**Oseen** 近似)。

(1) (i) Oseen 近似を適用し、さらに変数をうまく置き直すことにより、渦度拡散方程式を

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \alpha^2) \Omega = 0 \quad (7.36)$$

のような形に書きなおせ。(ii) 定数 α と **Reynolds** 数の関係を説明せよ。

ヒント: まず $\omega = \Omega e^{+\alpha x}$ と置いて代入し、次に α の値を適切に選ぶ。

(iii) 以下では「粘性が及ぶ領域に比べて円柱が小さい」すなわち $\alpha D \ll 1$ と仮定する。この条件式を、Reynolds 数を用いてあらわせ。

(2) 方程式 (7.36) を極座標で書き直し、変数分離せよ。

(3) (i) 流れ関数を $\psi = y F(r)$ とおいて、これから ω の θ 依存性を求めよ。(ii) 円柱近傍では $\Omega \simeq \omega$ と見なしてよい。このことと上記の結果を組み合わせ、 Ω を求めよ。

(4) 上記の結果には Bessel 関数が出てくるが、ここで

$$K_1(\alpha r) \simeq \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}$$

と近似してよい³⁹。これを用いて F を求め、境界条件を満たすように定数を決定せよ。

³⁷以下の議論と、§6 の問題との類似性に注意すること。

³⁸解の有効範囲は、だいたい $rU/\nu \ll 1$ を満たす範囲内である。

³⁹このような近似を用いているため、ここでの計算は定量的には正しくない。厳密な扱いについては、たとえば文献 [7, §81] を見よ。

(5) 結果を図示し、非粘性の結果および Stokes 近似の結果と比較せよ。(文献 [13] も参考にせよ。)

7.14 平板境界層

平らな板にそって流体が流れているとしよう。板の端を原点とし、板にそって x 軸を、板に垂直に y 軸をとる。板から離れたところでの流れを

$$\mathbf{u} = (U, 0), \quad p = p_0 = \text{const.} \quad (7.37)$$

とする。板の上 ($y = 0$) では粘着条件を満たす必要があるので、板の近くの流れは式 (7.37) とは異なるはずである。その様子を調べよう。

- (1) 今の問題に合わせて、2次元 Navier-Stokes 方程式および境界条件を書きください。
- (2) 熱伝導の問題 (7.8) では、壁からの影響を変数 s を通じて考慮した。これにならって、解の形を

$$(u, v) = (+\partial_y \psi, -\partial_x \psi), \quad \psi = Uy \Psi(s), \quad s = \text{const.} \times \nu^\alpha y^\beta \left(\frac{x}{U}\right)^\gamma \quad (7.38)$$

と仮定する。こういう解が本当に存在するならば、 s はちょうど無次元の変数になるはずである。この条件を満たすように、 α, β, γ の値を定めよ⁴⁰。

- (3) 速度の x 成分を $u = Uf'(s)$ と置く。(i) f と Ψ を関係づけよ。(ii) v を f であらわせ。
- (4) 板の端を無視し、 $xU/\nu \gg 1$ となる領域に着目する。Navier-Stokes 方程式の x 成分において、各項の大きさを比較し、他の項と比較して微小と見なせる項をゼロと置くことによって、方程式を単純化せよ。
- (5) Navier-Stokes 方程式の y 成分において、 $\partial_y p$ 以外の項は、すべて、(x 成分での対応する項に比べて) 微小であることを示せ。したがって、 $\partial_y p = 0$ としてよい。
- (6) 得られた結果をまとめると、式 (6.1) と本質的に同じ方程式になる。コンピュータを用いてこの方程式の数値解を求め、結果を図示せよ。

8 レポート課題: 「粘性のある流れ」

以下の2つの課題と、第7章の選択課題の内容を、それぞれレポートにまとめて提出せよ。(つまり、課題は全部で3つあることになる。)

8.1 Feynmann 物理学「粘性のある流れ」

Feynmann 物理学の「粘性のある流れ」(文献 [9] 第20章)を読み⁴¹、他の資料(文献 [10] の第9章・第10章や、流れの実験の写真集 [8, 18] など)も参考にして、次の事項についてレポートをまとめよ。

- Reynolds 数とは何か?
- 2つの円筒のあいだの Couette 流 (Taylor-Couette 流):
流れは壁に平行な定常流であると仮定して、手計算で解を求め、この解と実際の実験結果が一致するための条件について調べよ。また、この条件が破れると、実験ではどのような流れが観察されるか?
- 円柱を過ぎる流れ:
Reynolds 数の大きさをいろいろ変えると、流れの様子はどのように変化するか? (単なる模式図でなく、なるべく本物の実験の写真を見てスケッチせよ。また、§3.6 や §7.12 の結果と比較せよ。)

⁴⁰任意定数が残る場合は、 $\beta = 1$ となるように決めるとあとの計算が楽になる。

⁴¹天才的な洞察に満ちた本ではあるが、しかし、この章における「境界層」という語の使い方にはいささが疑問がないわけではない。ふつうの意味での「境界層」については、たとえば文献 [15] の第15章や、文献 [10] の p.169 以降を見よ。

8.2 身のまわりの流れの Reynolds 数

我々の周囲には、さまざまな流れや、流体中を進む物体などが存在する。これらの流れのなかから、例を3つ選び、Reynolds 数を概算せよ。ただし、以下の点に注意すること。

- 3つのうち最低1つは、他の誰とも重複しない題材を選ぶ⁴²。
- 代表長さ・代表速度・流体の種類を明記すること。
- 単位も含めて計算すること (下記の「例」を参照せよ)。

例: 陸上競技の選手が走るときの Reynolds 数

代表長さ: $L = [\text{胴体の幅}] = 60 \text{ cm}$

代表速度: $U = [\text{走る速度}] = 10 \text{ m/s}$

流体の種類: 空気 ($\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$)

したがって、Reynolds 数は

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \frac{(60 \text{ cm}) \times (10 \text{ m/s})}{0.15 \text{ cm}^2/\text{s}} = \frac{60 \times 10}{0.15} \times \frac{\text{cm} \times \text{m/s}}{\text{cm}^2/\text{s}} = 4000 \times 100 = 4 \times 10^5 \quad (8.1)$$

参考文献

- [1] 砂川重信. 電磁気学. 物理テキストシリーズ 4. 岩波書店, 1977.
- [2] 吉田武. ケプラー・天空の旋律. 共立出版, 1999.
- [3] 森毅. 線形代数—生態と意味. 日本評論社, 1980.
- [4] 中村純. 物理とテンソル. 物理数学 One Point 3. 共立出版, 1993.
- [5] Glansdorff and Prigogine. 構造・安定性・ゆらぎ — その熱力学的理論. みすず書房, 1977.
- [6] 巽友正. 連続体の力学. 岩波基礎物理学シリーズ 2. 岩波書店, 1995.
- [7] 今井功. 流体力学 (前編). 物理学選書 14. 裳華房, 1973.
- [8] 種子田定俊. 画像から学ぶ流体力学. 朝倉書店, 1988.
- [9] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁波と物性. ファインマン物理学 IV. 岩波書店, 1971.
- [10] 神部勉, 石井克哉. 流体力学. 裳華房, 1995.
- [11] 寺田文行, 木村宣昭. ベクトル解析の基礎. ライブラリ理工基礎数学 6. サイエンス社, 1998.
- [12] Landau and Lifshitz. 流体力学 2. 東京図書, 1971.
- [13] 木田重雄. 流体方程式の解き方入門. 物理数学 One Point 11. 共立出版, 1994.
- [14] 久保亮五. 大学演習 熱学・統計力学. 裳華房, 1961.

⁴²数理工学演習のページ (<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/edu/b3e/>) に、過去のレポートで扱った題材を載せる予定なので、それを見て、重複しないような題材を考えてほしい。また、同じ班のなかでの重複も避けること。

[15] 巽友正. 流体力学. 新物理学シリーズ 21. 培風館, 1982.
 [16] 松信八十男. 変形と流れの力学. 基礎の物理 2. 朝倉書店, 1981.
 [17] 青野修. 次元と次元解析. 物理学 One Point 16. 共立出版, 1982.
 [18] 日本機械学会. 写真集 流れ. 丸善, 1984.
 [19] Feynman, Leighton, and Sands. 電磁気学. ファインマン物理学 III. 岩波書店, 1969.
 [20] Donald A. McQuarrie. Statistical Mechanics, chapter 17, Continuum Mechanics. HarperCollins, 1976.
 [21] E. Kreyszig. 線形代数とベクトル解析. 技術者のための高等数学 2. 培風館, 1987.
 [22] 高橋康. 物理数学ノート. 講談社, 1992.

大学で物理学を学ぶ以上は、天才 Feynman の講義録を一度は必ず読むべきである。このプリントの前半の主題である「場」という考え方は、電磁気学の講義と並行する形で、文献 [19] の第 2・3・4・12 章で説明されている。

後半は流体力学の演習である。大西研の演習という性格から、波動に関連する題材が多くなったが、その枠のなかで、なるべく気体だけでなく液体 (非圧縮流体) も扱うように配慮した。流体力学の参考書としては、文献 [10] か [6] が手頃だろう。また、巽友正の「流体力学」[15] は、大学院で流体をやるならぜひ買って置きたい。文献 [7] は名著ではあるが、高価でかつ未完であるから、特に急いで購入する必要はないと思う。

このプリントは 1997 年に書いた原型を何度か改訂したものである。当初の原型では、主に文献 [5, 20] を参考にした。

補遺

A ギリシャ文字

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	u-pi
E	ϵ	e-pi	N	ν	nu	Φ	ϕ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi (khi)
H	η	eta	O	o	o-micron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	o-mega

B 線積分と面積分: 計算マニュアル

線積分

たとえば、次のような線積分を求めるための手順を説明する:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

- 積分経路 C が与えられているはずなので、それを図示する。
- 積分経路を「 $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s は a から b まで)」のようにパラメータ表示する⁴³。

⁴³ここではパラメータを s としているが、もちろん、使っていない変数であれば何でもよい。

- 線素 $d\mathbf{r}$ をパラメータ (今の例では s) であらわす。高校で習った「置換積分」と同じように考えてよい。
- \mathbf{u} を s であらわす。
- すべてがパラメータ表示できた段階で、積分を計算する。

面積分

面積分も、ほとんど同様の考え方で計算できる。ただし、 $d\mathbf{r}$ の代わりに \mathbf{ndS} を考えるところが異なる⁴⁴。

- 積分領域となる曲面 S が与えられているはずなので、それを2つのパラメータを用いてあらわす。
- 面積要素 \mathbf{ndS} をパラメータであらわす。
- 積分の中身をパラメータであらわす。
- すべてがパラメータ表示できた段階で、積分を計算する。

C 球面のパラメータ表示

半径 a の球面をパラメータ表示し、その上の面積要素 \mathbf{ndS} を求めよう (ここで \mathbf{n} は単位法線ベクトル)。それには、球面上の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を2つのパラメータであらわし、パラメータを微小に変化させてできる平行四辺形を考えればよい。

物理学では、ふつう (θ, ϕ) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta) \tag{C.1}$$

とあらわす。式 (C.1) は、 \mathbf{r} 方向の単位ベクトル \mathbf{e}_r を用いると

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

と書ける。微小な平行四辺形の辺に相当するベクトルは $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \Delta \theta$ および $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \Delta \phi$ であり、式 (C.1) を用いて具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (a \cos \theta \cos \phi, a \cos \theta \sin \phi, -a \sin \theta) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (-a \sin \theta \sin \phi, a \sin \theta \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{ndS} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi \right) = \dots = \mathbf{e}_r a^2 \sin \theta d\theta d\phi \tag{C.2}$$

を得る⁴⁵。

場合によっては、式 (C.1) とは異なる表し方を用いることもある。たとえば地球物理では通常の緯度や経度に合わせた変数を用いるほうが好都合だろう。クライツィグ [21, p.182] は、 (u, v) をパラメータとして

$$\mathbf{r} = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v) \tag{C.3}$$

とあらわしている。さきほどと同様に \mathbf{ndS} を求めると、結果は次のようになる:

$$\mathbf{ndS} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) = \dots = \mathbf{e}_r a^2 \cos v du dv \tag{C.4}$$

⁴⁴本によっては、 \mathbf{ndS} を $d\mathbf{S}$ であらわしている場合がある。

⁴⁵外積の図形的な意味を思い出してほしい: 平行四辺形の2つの辺の外積は、面ベクトル (面積と法線を示すベクトル) を与える。

D 勾配・循環・発散

ベクトル場やスカラー場の微分についてまとめておこう。出発点として、最も基本的な微分の定義

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

の“分母を払って”得られる式⁴⁶から出発する:

$$f(x+h) - f(x) = h \frac{df}{dx} \quad (\text{ここで } h \rightarrow 0).$$
 (D.1)

勾配

式(D.1)を拡張して、変数 x を位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で置き換えた式を考えよう:

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{r}) = \mathbf{h} \cdot \nabla f, \quad \mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow \mathbf{0}$$
 (D.2a)

ここで ∇f を「 f の勾配」という。式(D.2a)と整合するようには、次のように定義すればよい:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$
 (D.2b)

式(D.2)において、 f はスカラー、 ∇f はベクトルである。ベクトル \mathbf{f} に対して勾配 $\nabla \mathbf{f}$ を求めることも可能だが、その結果は、ベクトルでもスカラーでもなく **2階テンソル**⁴⁷になる。このような事態は、たとえば

$$\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{q} = [p_x \ p_y \ p_z] \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} [q_x \ q_y \ q_z]$$
 (D.3)

を「うしろから」すなわち $\mathbf{p} \cdot (\nabla \mathbf{q})$ のように計算する場合に生じる。これでも良いのだが、式(D.3)のような場合、「前から」計算するほうが間違いが少ない:

$$\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{q} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{q} = (p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z) \mathbf{q}$$
 (D.4)

ついでに、 $\mathbf{p} \cdot \nabla$ と $\nabla \cdot \mathbf{p}$ は意味が全く違うことに注意しよう。

回転

式(D.2a)の左辺は、 \mathbf{h} であらわされる微小な線分の両端の差を示している。これを2次元に拡張しよう。そこで、 $\mathbf{n} \Delta S$ であらわされる微小な平行四辺形を考えて、その周 C での線積分を含む式を作る:

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{n} \Delta S) \cdot \text{rot } \mathbf{u}$$
 (D.5a)

ここで $\text{rot } \mathbf{u}$ を「 \mathbf{u} の回転」という⁴⁸。式(D.5a)を成立させるためには、次のように定義すればよい:

$$\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$
 (D.5b)

⁴⁶ここでは、分かりやすくするために、 \lim に関する数学的厳密性を無視して話を進める。そんないいかげんなことでは困る、という人は、きちんとした証明の載っている数学の本を見て、ここでの説明との対応を考えること。

⁴⁷「ベクトルを成分とするベクトル」のこと。普通は(3次元の場合)、 3×3 行列としてあらわすことが多い。

⁴⁸人によっては rot の代わりに curl と書く。意味はどちらも同じである。

多くの教科書では、式 (D.5) の代わりに、行列式を用いた定義を載せている [21, §3-11]。しかし、ここで行列式に頼るのは良くない。微分を含む計算では、演算の順番に注意する必要があるのに、行列式を使うとその点に分かりにくくなるので、結果が狂ってくる可能性があるからだ。行列式は裏技にとどめておき、実際の計算では式 (D.5b) を直接に書き下すのが良い。

発散

微小線分あるいは微小面積の代わりに微小体積 ΔV を考え、その表面を S とすると

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = (\Delta V) \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (\text{D.6a})$$

という式になり、 $\operatorname{div} \mathbf{q}$ を「 \mathbf{q} の発散」という。式 (D.6a) を成立させるには、次のように定義すればよい:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (\text{D.6b})$$

Stokes の定理

最後に、広義の Stokes の定理についてまとめておく。式 (D.2a) は微小な線分に関するものであるが、多数の微小な線分について和をとることにより、有限の長さの曲線 C に拡張することができる:

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_A) \quad (\mathbf{r}_A = [C \text{ の始点}], \quad \mathbf{r}_B = [C \text{ の終点}]) \quad (\text{D.7})$$

同様に、式 (D.5a) を有限の曲面に拡張すると

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \quad (C = [S \text{ の境界}]) \quad (\text{D.8})$$

式 (D.6a) を有限の体積に拡張すると

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{q}) dV = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (S = [V \text{ の境界}]) \quad (\text{D.9})$$

となる。式 (D.8) が (狭義の) **Stokes** の定理、式 (D.9) が **Gauß** の定理である。これらの式は、一般の n 次元空間に拡張できるような形で統一的に書けることが知られており⁴⁹、これを 広義の **Stokes** の定理 あるいは 拡張された **Stokes** の定理 という。

E 理想気体のエントロピー

理想気体では、質量あたりの内部エネルギー U およびエントロピー S は、

$$U = \int c_V dT = c_V T \quad (\text{E.1})$$

$$S = \int \frac{c_V}{T} dT + \int \frac{R}{V} dV = S_0 + c_V \log \frac{T}{T_0} + R \log \frac{V}{V_0} \quad (\text{E.2})$$

⁴⁹外微分形式というものをを用いる。きわめて短い説明が、文献 [2, §38] に載っている。

と書ける [15, p.46]。ここで、 $V = 1/\rho$ は質量あたりの体積であり、 c_V は定積比熱、 R は質量あたりの気体定数⁵⁰で、比熱比 γ を用いると $R = (\gamma - 1)c_V$ が成り立つ。空気では $\gamma \doteq 1.4$ である。

式 (E.1)(E.2) のなかには理想気体の状態方程式が隠れていることに注意しよう。一般に、どんな物質でも、 (S, U, V) の関係式が分かれば、そこから状態方程式を導くことができる⁵¹。理想気体の場合、式 (E.1) と式 (E.2) から T を消去し、 U について解くと

$$U = U_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma} \exp \left(\frac{S - S_0}{c_V} \right)$$

となる。これと熱力学の法則 $dU = T dS - p dV$ から

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = \dots = \rho RT \tag{E.3}$$

を得る。式 (E.3) は、よく知られた理想気体の状態方程式である。

F 連鎖則

合成関数の微分に関しては、連鎖則が成り立つ。1変数関数の場合の結果は良く知られている。たとえば、 $f = f(x)$, $x = x(t)$ すなわち $t \mapsto x \mapsto f$ とすると、次の式が成り立つ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{df}{dx}. \tag{F.1}$$

多変数関数の場合の連鎖則を考えよう。たとえば、 $f = f(x, y)$, $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ すなわち

$$(s, t) \mapsto (x, y) \mapsto f$$

の場合は、どうなるか?

微分の定義に戻って考えよう。常微分の場合の式 (D.1) に対応する式は、偏微分の場合は次のようになる:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta f = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \tag{F.2}$$

$$x(s + \Delta s, t + \Delta t) = x(s, t) + \Delta x = x(s, t) + \frac{\partial x}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial x}{\partial t} \Delta t \tag{F.3}$$

$$y(s + \Delta s, t + \Delta t) = y(s, t) + \Delta y = y(s, t) + \frac{\partial y}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t \tag{F.4}$$

式 (F.3) を Δx について解き、式 (F.4) を Δy について解いて、これらを式 (F.2) の右辺に代入し、 Δs および Δt で整理する。この結果を

$$f(s + \Delta s, t + \Delta t) = f(s, t) + \Delta f = f(s, t) + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \tag{F.5}$$

と比較して、次の式を得る:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{F.6a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{F.6b}$$

⁵⁰モルあたりの気体定数を \tilde{R} とすると、高校で習ったように、 n モルの気体の状態方程式は、 $pV = n\tilde{R}T$ と書ける。分子のモルあたりの質量を M とすると、 $\rho = Mn/V$ だから、 $p = \rho\tilde{R}T/M$ が成り立つ。これと式 (E.3) を比較し、 $R = \tilde{R}/M$ を得る。

⁵¹このことを知らないと、統計力学の講義の後半は全く理解できなくなる。

式(F.6)は任意の $f = f(x, y)$ について成立するので、演算子の関係として

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} \tag{F.7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \tag{F.7b}$$

と書いてもよい。演算子が右側に来るような順番で書いてあることに注意せよ (もし演算子を左側を書くと、意味が違ってしまう)。

G 誤差関数・積分指数関数

指数関数を含む積分で定義される関数について、必要な事項をまとめておく。

誤差関数

Gaußの誤差関数を

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds, \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds \tag{G.1}$$

のような積分で定義する⁵²。どんな関数なのかを知るには、**GNU PLOT**や**MATHEMATICA**などでグラフを描いてみればよい。

たとえば、**GNU PLOT**の場合、

```
plot erf(x), erfc(x)
```

などと入力すればグラフが表示される。範囲やタイトルの自動設定が気に入らない場合は

```
plot [0:2.5] [0:1.2] erf(x) title "Gauss' error function"
```

のようにして自分の好きなように指定する。

積分指数関数

歴史的理由により、積分指数関数は

$$\operatorname{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \tag{G.2}$$

のようにマイナスを含めて定義されている (ここで $x > 0$)。小さな x に対しては

$$\operatorname{Ei}(-x) = \gamma + \log x - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{18} + \dots \tag{G.3}$$

が成り立つ。ここで γ は **Euler** の定数で、だいたい $\gamma \doteq 0.577$ である。

⁵²本によって定義が違う場合があるので注意すること。

H Helmholtz 方程式と Bessel 関数

物理のさまざまな問題において、次の形の微分方程式がよく現われる:

$$\Delta\phi \pm \alpha^2\phi = 0 \tag{H.1}$$

ここで $\Delta = \nabla^2$ である。方程式 (H.1) を **Helmholtz** 方程式という⁵³。Bessel 関数は、2次元の極座標によって Helmholtz 方程式 (H.1) を解く場合に、解として現れる。

Helmholtz 方程式: 1次元の場合

まず、複号が+の場合、Helmholtz 方程式 (H.1) は

$$\partial_x^2\phi + \alpha^2\phi = 0 \tag{H.2}$$

となる。式 (H.2) の解は振動的であり、三角関数を用いて

$$\phi = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x = C_1 \exp(+i\alpha x) + C_2 \exp(-i\alpha x) \tag{H.3a}$$

$$\exp(\pm i\alpha x) = \cos \alpha x \pm i \sin \alpha x \tag{H.3b}$$

のように書ける。式 (H.3b) は、三角関数を指数関数に結びつける式である。

1次元で、複号が-の場合、式 (H.1) は次のようになる:

$$\partial_x^2\phi - \alpha^2\phi = 0. \tag{H.4}$$

式 (H.4) の解は、単調増加する解 $\phi = \exp(+\alpha x)$ および 単調減少する解 $\phi = \exp(-\alpha x)$ の一次結合により

$$\phi = A \exp(+\alpha x) + B \exp(-\alpha x) \tag{H.5}$$

のように与えられる。

Bessel 関数

2次元の場合を考え、極座標を用いて式 (H.1) を変数分離する。分離定数を λ とすると、 θ 方向の方程式は

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0$$

となるが、周期条件を満たす解を得るためには $\lambda = m^2$ (ここで m は 0 以上の整数) に限定する必要がある。これにより、 r 方向の方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \pm \alpha^2 R - \frac{m^2}{r^2} R = 0 \tag{H.6}$$

となる (**Bessel** の微分方程式)。

方程式 (H.6) において複号が+の場合を考えよう。1次元における式 (H.2) と同じく、この場合の解は振動的である。一般解は、ふつう、

$$R = AJ_m(\alpha r) + BY_m(\alpha r) \tag{H.7}$$

の形に書かれる⁵⁴。第1項の $J_m(\alpha r)$ を **Bessel** 関数、第2項の $Y_m(\alpha r)$ を **Neumann** 関数(または第2種 Bessel 関数)と言う。これらの関数のグラフは、MATHEMATICA を用いて

⁵³本によっては、式 (H.1) の複号が+の場合だけを Helmholtz 方程式と呼び、-のほうを(静的)湯川方程式[22, p.90]と呼んで区別している。

⁵⁴本によっては、 Y_m でなく N_m と書いている。

```
Plot[ BesselJ[0,s], {s,0,50} ]
```

あるいは

```
Do[ Plot[ {BesselJ[m,s], BesselY[m,s]}, {s, 0,15}, PlotRange -> {-3.5, 1.2} ],
    {m, 0, 5}
]
```

などとすれば見ることができる。Neumann 関数は原点で発散することに注意しよう。

1次元における式 (H.3b) に対応して、式 (H.6) の解を

$$H_n^{(1)}(\alpha r) = J_n(\alpha r) + i Y_n(\alpha r) \tag{H.8a}$$

$$H_n^{(2)}(\alpha r) = J_n(\alpha r) - i Y_n(\alpha r) \tag{H.8b}$$

の形に書くこともできる (**Hankel** 関数)。

変形 Bessel 関数

方程式 (H.6) で、複号が - の場合⁵⁵を考えよう。これは、1次元で言えば式 (H.4) に対応する。一般解は

$$R = AI_m(\alpha r) + BK_m(\alpha r) \tag{H.9}$$

である。ここで、 $\alpha r \rightarrow +\infty$ に対し、第1項の $I_m(\alpha r)$ は指数関数的に増大し、第2項の $K_m(\alpha r)$ は指数関数的に減少する (文献 [13] の付録 A.4 を見よ)。両者をまとめて変形 **Bessel** 関数と呼ぶ。

変形 Bessel 関数の積分表示および近似式

Bessel 関数および変形 Bessel 関数を、積分を用いて表示する公式が、多数知られている。ここでは、特に、変形 Bessel 関数のうち K_m をあらわす公式の一部を示しておく。

まず、 $\xi > 0$ に対して

$$K_m(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\xi}{2} \left(p + \frac{1}{p}\right)\right] \frac{dp}{p^{m+1}} \tag{H.10}$$

が成り立つ。ここで $p = e^s$ のように変数変換し、少々の変形をおこなうと、たとえば K_1 は

$$K_1(\xi) = \xi \int_0^\infty \exp(-\xi \cosh s) \sinh^2 s \, ds \tag{H.11}$$

のように書ける。さらに、 $\cosh s = 1 + \sigma/\xi$ と置いて式 (H.11) を計算し、

$$K_1(\xi) = \frac{e^{-\xi}}{\xi} \int_0^\infty e^{-\sigma} \sigma \left(1 + \frac{2\xi}{\sigma}\right)^{1/2} d\sigma \tag{H.12}$$

を得る。

もし ξ が小さければ、式 (H.12) の積分を、 $\xi = 0$ での値で近似的に置き換えてしまうことができる:

$$K_1(\xi) \simeq \frac{e^{-\xi}}{\xi} \int_0^\infty e^{-\sigma} \sigma d\sigma = \frac{e^{-\xi}}{\xi}. \tag{H.13}$$

詳しい計算によると

$$K_1(\xi) = \frac{e^{-\xi}}{\xi} \left[1 + \xi + \left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{\xi}{2}\right) \xi^2 + \dots \right] \tag{H.14}$$

であり、ここで γ は式 (G.3) と同じく **Euler** の定数 ($\gamma \doteq 0.577$) である。

⁵⁵複号が - の場合の式 (H.6) を、特に変形された **Bessel** の微分方程式と呼ぶことが多い。