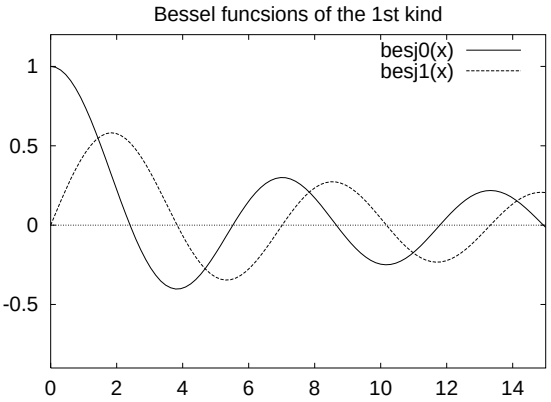
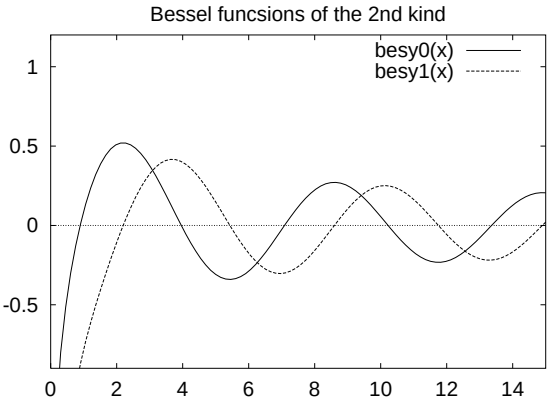
Bessel 関数とその仲間たち

第 1 種 Bessel 関数 $u = J_n(z)$



- 母関数表示:
  $$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \sum_n J_n(z)\, t^n$$
- 原点の近くで $J_n \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n$
- 遠方 $(z \to \infty)$ で
  $$J_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \cos\left[z - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

第 2 種 Bessel 関数 $u = Y_n(z)$



- $J_{\pm\nu}$ の 1 次結合として定義:
  $$Y_n = \lim_{n\to\nu} \frac{J_\nu \cos\pi\nu - J_{-\nu}}{\sin\pi\nu}$$
- 原点の近くで
  $$Y_n \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \qquad (n>0)$$
- Y_0 は原点の近くで対数的に発散
- 遠方 $(z \to \infty)$ で
  $$Y_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \sin\left[z - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

これらは**Bessel** の微分方程式

$$\left[\frac{1}{z}\partial_z z \partial_z + 1 - \frac{n^2}{z^2}\right] u = 0$$

を満たす。

第 2 種の Bessel 関数を**Neumann** 関数と称し、$N_n(z)$ のように書くことも多い。また

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$$
$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z)$$

を**Hankel** 関数という。

三角関数が指数関数と結びついているように、Bessel 関数は、変形された **Bessel** の微分方程式

$$\left[\frac{1}{z}\partial_z z \partial_z - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right)\right] u = 0$$

の解である変形 **Bessel** 関数と結びついている。第 1 種の変形 Bessel 関数 I_n は

$$i^n I_n(z) = J_n(iz)$$

で定義され、$z \to +\infty$ で指数関数的に増大する。他方、第 2 種の変形 Bessel 関数 K_n は 原点で対数的またはベキ的に発散し、$z \to +\infty$ で指数関数的にゼロになるような関数である。