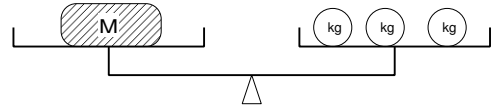


量は量であって数ではない

たとえば「物体の質量を M とすると $M = 3\text{ kg}$ 」とはどういう意味か? もちろんこれは、この物体が天秤で 1 kg のおもり 3 個 とつりあう という意味だ。式で書くと



$$[\text{物体の質量}] = 3 \times [\text{おもりの質量}] \quad \text{つまり} \quad M = 3 \times \text{kg}.$$

文字式では \times は省略するので、これを $M = 3\text{ kg}$ と書く。決して $M = 3$ ではないし、また $M = 3 (\text{kg})$ でもない。質量 M は量であり、3 は数であり、量は量であって数ではないからだ。

具体的な値を含む慣性モーメントの計算

半径 20 cm で質量が 7.5 kg の円盤の慣性モーメント I を計算してみよう。

最初から具体的な値を代入して計算。

$$\begin{aligned} \text{面密度} = \rho &= \frac{7.5 \text{ kg}}{3.14 \times (20 \text{ cm})^2} = 6.0 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2 = 60 \text{ kg/m}^2 \\ I &= \int \rho r^2 dS = \int_0^{20 \text{ cm}} \left(60 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) r^2 \times 2\pi r dr = 2 \times 3.14 \times 60 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{20 \text{ cm}} = 0.15 \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

かなりごちゃごちゃして面倒だが、計算を間違えなければ、最終的に正しい単位のついた答えが出てくる。決して最後に単位をつけるわけではないことに注意。

まずは文字で置いて積分を計算し、そのあとで具体的な値を代入。

半径を a 、質量を m とすると面密度 $\rho = m/(\pi a^2)$ 。慣性モーメントは

$$I = \int \rho r^2 dS = \rho \int_0^a r^2 \times 2\pi r dr = \frac{m}{\pi a^2} \times \frac{\pi}{2} a^4 = \frac{1}{2} m a^2.$$

この式に $a = 20 \text{ cm}$ および $m = 7.5 \text{ kg}$ を代入して

$$I = \frac{1}{2} \times (7.5 \text{ kg}) \times (20 \text{ cm})^2 = 1500 \text{ kg cm}^2 = 0.15 \text{ kg m}^2.$$

無次元の変数に変換してから積分を計算。

長さの基準量として円盤の半径 a をとり、 $r \mapsto \tilde{r} = r/a$ のように変数変換 (このような変換を無次元化という)。このとき $dr = a d\tilde{r}$ 、したがって $dS = a^2 \tilde{r} d\tilde{r} d\theta$ となり、慣性モーメントは

$$I = \int \rho r^2 dS = \frac{m}{\pi a^2} \int_0^1 (a\tilde{r})^2 \times 2\pi a^2 \tilde{r} d\tilde{r} \quad \text{すなわち} \quad \tilde{I} = \frac{I}{m a^2} = 2 \int_0^1 \tilde{r}^3 d\tilde{r} = \frac{1}{2}.$$

次に“有次元化”をおこなってもとの I に戻すと $I = \tilde{I} m a^2 = \dots = 0.15 \text{ kg m}^2$ となる (途中の計算は前の例と同じ)。今回のように積分が解析的に計算できる場合はあまり意味がないが、たとえば積分を数値的に実行するしかない場合や、複数の相似形の物体について値を求めたい場合には、この方法が効果を発揮する。

ひらきなおって“単位なし”で計算する。

$$\frac{I}{\text{kg m}^2} = \int_0^{0.2} \frac{\rho}{\text{kg/m}^2} \tilde{r}^2 \times 2\pi \tilde{r} d\tilde{r} = 60 \times 2 \times 3.14 \int_0^{0.2} \tilde{r}^3 d\tilde{r} = 0.15 \quad \text{したがって} \quad I = 0.15 \text{ kg m}^2.$$

ここで $\tilde{r} = r/m$ (つまり一種の無次元化)。なお、左辺の $I/(\text{kg m}^2)$ がないと小学校方式になるが、それはいくらなんでも避けよう。