

Heun 法の間違いプログラム

力学演習 II 参考資料 (松岡・大信田)

2005 年 2 月 15 日

<http://www.damp.tottori-u.ac.jp/~ooshida/num/heun0502.pdf>

シミュレーション課題 (3) のレポートで、Heun 法 (2 次 Runge-Kutta 法) のプログラムを間違えていると思われる人がたくさんいました。2 ページ目の例を良く見比べて、自分のプログラムの間違いを直しましょう。

なお、解くべき微分方程式は、次のような式でした:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p, q, s) \\ p \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad f(p, q, s) = -\beta p + X_0 \Omega^2 \sin s \cos q - \sin q.$$

この解を、いかに正確に求めるか、というのが問題です。Heun 法を使えばそれなりに高精度になるはずですが、ここで式を間違えると、高精度どころか、Euler 法と五十歩百歩の結果になってしまいます。

(2 ページ目に続く)

正しい例: その 1

$$\begin{aligned} & \text{do } i = 0, i_{\max} - 1 \\ & \begin{bmatrix} p_* \\ q_* \\ s_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} f(p_i, q_i, s_i) \\ p_i \\ \Omega \end{bmatrix} \quad ! \quad t = t_{i+1/2} \text{ での値} \\ & \begin{bmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} f(p_*, q_*, s_*) \\ p_* \\ \Omega \end{bmatrix} \quad ! \quad \text{中点公式} \\ & \text{end do} \end{aligned}$$

この方法は「改良 Euler 法」とか「Heun の矩形公式」と呼ばれることもある。

正しい例: その 2

$$\begin{aligned} & \text{do } i = 0, i_{\max} - 1 \\ & \begin{bmatrix} p_* \\ q_* \\ s_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} f(p_i, q_i, s_i) \\ p_i \\ \Omega \end{bmatrix} \quad ! \quad t = t_{i+1} \text{ での値の予測子} \\ & \begin{bmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \left(\begin{bmatrix} f(p_i, q_i, s_i) \\ p_i \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(p_*, q_*, s_*) \\ p_* \\ \Omega \end{bmatrix} \right) \quad ! \quad \text{台形公式} \\ & \text{end do} \end{aligned}$$

この方法は「修正 Euler 法」あるいは「Heun の台形公式」と呼ばれることもある。また、予測子・修正子法の一つでもある。

間違っている例

$$\begin{aligned} & \text{do } i = 0, i_{\max} - 1 \\ & \begin{bmatrix} p_* \\ q_* \\ s_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} f(p_i, q_i, s_i) \\ p_i \\ \Omega \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ s_i \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \left(\begin{bmatrix} f(p_i, q_i, s_i) \\ p_i \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(p_*, q_*, s_*) \\ p_* \\ \Omega \end{bmatrix} \right) \\ & \text{end do} \end{aligned}$$

全部 $\Delta t \rightarrow \Delta t/2$ とすれば良いというものではない。