

1 偏微分方程式と差分近似

1. 偏微分方程式 (sec. 2.1)
本講義で扱う偏微分方程式の紹介
- 1-1 線形/非線形
- 1-2 初期条件と境界条件
- 1-3 2階線形偏微分方程式の分類
2. 差分近似 (sec. 2.3)

1

1 偏微分方程式

この講義で扱う方程式は、主に2階線形の偏微分方程式
(主にこんなもの)

- * 1次元拡散方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (+b)$
- * 1次元波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (+b)$
- * 2次元ラプラス方程式、ポアソン方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b$
 u は t, x, y などの関数 \leftarrow 未知関数(これを求めたい)
 a, b は定数、または t, x, y などの関数 \leftarrow 既知

2

用語の説明

- N次元とは? \rightarrow (本講義ではたいがい) 空間N次元の意味.
独立変数の物理的意味: t を時間, x, y を空間と思っている.
- 線形方程式とは? u が登場する部分をまとめて $L[u]$ と表す
 \rightarrow 次の2式を満たすなら線形. 満たさないなら非線形.
(1) $L[f+g] = L[f] + L[g]$, (2) $L[c f] = c L[f]$ (c は定数)
- 同次/非同次
 $L[u] = 0$: 同次方程式
 $L[u] = (0以外の, 与えられた関数)$: 非同次方程式

3

1-1 線形/非線形

\rightarrow レポート1問1

例: $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 + e^{-x}$ $\left(L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ とおくと } L[u] = 1 + e^{-x} \right)$

$L[u] = u_t - 3u_{xx}$ が次の2式を満たすから、これは線形方程式だ.

$$(1) L[f+g] = L[f] + L[g], \quad (2) L[c f] = c L[f] \quad (c \text{ は定数})$$

線形だと何がうれしいか?

- (☆1) f と g が $L[u]=0$ の解なら, $c_1 f + c_2 g$ も $L[u]=0$ の解になる.
 - (☆2) f が $L[u]=b_1$ の解で, g が $L[u]=b_2$ の解なら,
 $c_1 f + c_2 g$ は $L[u]=c_1 b_1 + c_2 b_2$ の解になる.
- 非線形方程式だと、一般に (☆1) (☆2) は成り立たない.

4

1-2 初期条件と境界条件

解を1つに定めるためには,
(大雑把に言うと) 微分階数の分だけ条件が必要.

例1: $\frac{d^2 u}{dt^2} = a u, \quad u=u(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (1)$

時間 t について 2階微分 \rightarrow 条件が2個必要

初期条件 $u(0) = f_1, \quad \frac{du}{dt}(0) = f_2. \quad (2)$

式(1)(2)を初期値問題と呼ぶ.

5

例2: $\frac{d^2 u}{dx^2} = a u, \quad u=u(x), \quad 0 < x < 1. \quad (1)$

空間 x について 2階微分 \rightarrow 条件が2個必要

境界条件 $u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2. \quad (2)$

式(1)(2)を境界値問題と呼ぶ.

境界値問題の用語

- 両端で u を与える: Dirichlet (ディレクレ)問題 (第1種境界値問題)
- 両端で du/dx を与える: Neumann (ノイマン)問題 (第2種境界値問題)
- 両端で $u + c du/dx$ を与える: Robin (ローバン)問題 (第3種境界値問題)
- 片方で u , もう片方で du/dx を与える: 混合型境界値問題

6

例3: $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u = u(x, t)$, $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$. (1)

時間 t について 1階微分 \rightarrow 条件が 1個必要

初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ (2)

空間 x について 2階微分 \rightarrow 条件が 2個必要

境界条件 $u(0, t) = g_1(t)$, $u(1, t) = g_2(t)$ (3)

式(1)(2)(3)を 初期値境界値問題 と呼ぶ.

7

1-3 2階線形方程式の分類

2階線形偏微分方程式の一般的な形

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G$$

A, B, \dots, G は 定数 または x, y の関数.

* $B^2 - 4AC = 0$: 放物型 (空間1次元問題で) 熱や物質などの拡散

* $B^2 - 4AC > 0$: 双曲型 (空間1次元問題で) 振動, 波動

* $B^2 - 4AC < 0$: 橋円型 (空間2次元で) 拡散問題の定常状態

8

2階線形方程式の標準形

* 放物型 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dots$ \cdots は, u, u_x, u_y と既知関数を含む項

* 双曲型 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dots$ (または $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots$)

* 橋円型 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots$

一般の式は, 変数変換によって上の3つに帰着する
→ レポート1 問2

9

2. 差分法とはどんな数値解法か?

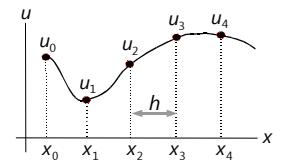
例: $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x)$, $a < x < b$

(1) 連続変数 x を離散化する.

$$x_i = a + h i, \quad (i=0, \dots, N)$$

$$h = (b-a)/N.$$

$u_i = u(x_i)$ この値を求めるのが差分法の目標.



(2) 導関数は, 差分商で近似する.

(3) u_i についての方程式を解く.

10

2-1. 1階導関数の差分近似 [$u = u(x)$ のとき]

前進差分

$u(x_i + h)$ を $x = x_i$ 中心の泰イラー級数に展開する.

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i) h + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}(x_i) h^2 + \dots \quad (1)$$

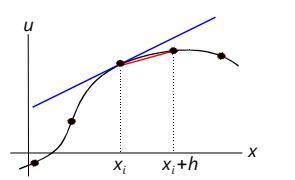
$\frac{du}{dx}$ について解くと,

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h)$$

$O(h)$ を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}$$

前進差分近似の誤差は $O(h)$
(h と同じかそれより小さい量)



11

後退差分

$u(x_i - h)$ を $x = x_i$ 中心の泰イラー級数に展開する.

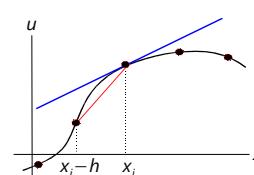
$$u(x_i - h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i) h + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}(x_i) h^2 + \dots \quad (2)$$

$\frac{du}{dx}$ について解くと,

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{\Delta x} + O(h)$$

$O(h)$ を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}$$



後退差分近似の誤差は $O(h)$

12

中心差分

$$u(x_i+h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (1)$$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (2)$$

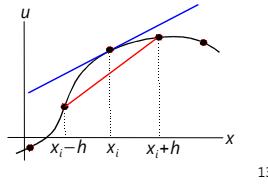
式(1) - 式(2) から

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h} + O(h^2)$$

$O(h^2)$ を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h}$$

中心差分近似の誤差は $O(h^2)$



13

2-2. 2階導関数の差分近似 [$u=u(x)$ のとき]

$$u(x_i+h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (1)$$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (2)$$

式(1) + 式(2) から

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) = \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$O(h^2)$ を無視すると

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2}$$

14

2階導関数の差分近似. 別の導出方法.

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) &= \frac{d}{dx} \frac{du}{dx}(x_i) \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{du}{dx}(x_i+h) - \frac{du}{dx}(x_i) \right] \quad \leftarrow \text{前進差分で近似} \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_i-h)}{h} \right] \quad \leftarrow \text{後退差分で近似} \\ &= \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)}{h^2} \end{aligned}$$

前進差分と後退差分の順番は逆でもよい.

15

2-3. 偏導関数の差分近似 [$u=u(x, y)$ のとき]

$$\text{例: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d$$

連続変数 x, y を離散化する

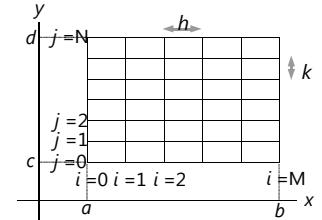
$$x_i = a + h i \quad (i=0, \dots, M),$$

$$h = (b-a)/M.$$

$$y_j = c + k j \quad (j=0, \dots, N),$$

$$k = (d-c)/N.$$

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j)$$



16

1階偏導関数の差分近似

$u_{i\pm 1,j} = u(x_i \pm h, y_j)$ を $(x, y) = (x_i, y_j)$ 中心のテイラー級数に展開する

$$u_{i\pm 1,j} = u_{i,j} \pm \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 \pm \dots$$

1変数関数のときと同じ手順をふむと

$$\text{前進差分 } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\text{後退差分 } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

$$\text{中心差分 } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

y 方向の場合はこう.

$$\text{前進 } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$\text{後退 } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

$$\text{中心 } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

17

2階偏導関数の差分近似 u_{xx}, u_{yy}

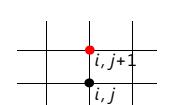
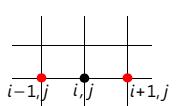
1変数関数のときと同じ手順で

$$u_{i\pm 1,j} = u_{i,j} \pm \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 \pm \dots \quad \text{から}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j\pm 1} = u_{i,j} \pm \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 \pm \dots \quad \text{から}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$



18

レポート1

See 別紙

問1 線形/非線形、見きわめと証明.

問2 2階偏微分方程式の分類について

* 変数変換の練習.

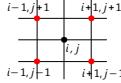
* 標準形へ変形すること.

おまけ情報: 余裕のある人向けの話

2階偏導関数の差分近似.

Uxy の差分近似はどんなんか?

$$\begin{aligned}
 u_{i\pm 1,j\pm 1} &= u(x_i \pm h, y_j \pm k) \text{を } (x, y) = (x_i, y_j) \text{中心に展開} \\
 u_{i+1,j+1} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (1) \\
 u_{i+1,j-1} &= u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (2) \\
 u_{i-1,j+1} &= u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (3) \\
 u_{i-1,j-1} &= u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (4)
 \end{aligned}$$

(1)-(2)-(3)+(4)とすると、右辺には u_{xy} (と4次以上の項)だけ残る 21

(1) - (2) - (3) + (4) を $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ について解いて、
高次の項を無視すると

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}$$

