

## 1 偏微分方程式と差分近似

### 1. 偏微分方程式 (sec. 2.1)

本講義で扱う偏微分方程式の紹介

1-1 線形/非線形

1-2 初期条件と境界条件

1-3 2階線形偏微分方程式の分類

### 2. 差分近似 (sec. 2.3)

1

## 1 偏微分方程式

この講義で扱う方程式は、主に2階線形の偏微分方程式  
(主にこんなもの)

\* 1次元拡散方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (+b)$

\* 1次元波動方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (+b)$

\* 2次元ラプラス方程式, ポアソン方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b$

$u$  は  $t, x, y$  などの関数 ← 未知関数(これを求めたい)

$a, b$  は定数, または  $t, x, y$  などの関数 ← 既知

2

### 用語の説明

○ N次元とは? → (本講義ではたいがい) 空間N次元の意味.

独立変数の物理的意味:  $t$  を時間,  $x, y$  を空間と思っている.

○ 線形方程式とは?  $u$  が登場する部分をまとめて  $L[u]$  と表す

→ 次の2式を満たすなら線形. 満たさないなら非線形.

(1)  $L[f+g] = L[f] + L[g]$ , (2)  $L[c f] = c L[f]$  ( $c$  は定数)

○ 同次/非同次

$L[u] = 0$ : 同次方程式

$L[u] = (0 \text{ 以外の, 与えられた関数})$ : 非同次方程式

3

### 1-1 線形/非線形

→ レポート1問1

例:  $\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 + e^{-x}$   $\left( L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ とおくと } L[u] = 1 + e^{-x} \right)$

$L[u] = u_t - 3 u_{xx}$  が 次の2式を満たすから, これは線形方程式だ.

(1)  $L[f+g] = L[f] + L[g]$ , (2)  $L[c f] = c L[f]$  ( $c$  は定数)

線形だとながうれしいか?

(☆1)  $f$  と  $g$  が  $L[u]=0$  の解なら,  $c_1 f + c_2 g$  も  $L[u]=0$  の解になる.

(☆2)  $f$  が  $L[u]=b_1$  の解で,  $g$  が  $L[u]=b_2$  の解なら,

$c_1 f + c_2 g$  は  $L[u]=c_1 b_1 + c_2 b_2$  の解になる.

非線形方程式だと, 一般に (☆1) (☆2) は成り立たない.

4

### 1-2 初期条件と境界条件

解を 1つに定めるためには,  
(大雑把に言うと) 微分階数の分だけ条件が必要.

例1:  $\frac{d^2 u}{dt^2} = a u, u = u(t), 0 < t < \infty.$  (1)

時間  $t$  について 2階微分 → 条件が 2個必要

初期条件  $u(0) = f_1, \frac{du}{dt}(0) = f_2$  (2)

式(1)(2) を 初期値問題 と呼ぶ.

5

例2:  $\frac{d^2 u}{dx^2} = a u, u = u(x), 0 < x < 1.$  (1)

空間  $x$  について 2階微分 → 条件が 2個必要

境界条件  $u(0) = g_1, u(1) = g_2.$  (2)

式(1)(2) を 境界値問題 と呼ぶ.

境界値問題の用語

両端で  $u$  を与える: Dirichlet (ディレクレ)問題 (第1種境界値問題)

両端で  $du/dx$  を与える: Neumann (ノイマン)問題 (第2種境界値問題)

両端で  $u + c du/dx$  を与える: Robin (ロバン)問題 (第3種境界値問題)

片方で  $u$ , もう片方で  $du/dx$  を与える: 混合型境界値問題

6

例3:  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u = u(x, t)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $0 < t < \infty$ . (1)

時間  $t$  について 1階微分 → 条件が 1個必要

初期条件  $u(x, 0) = f(x)$  (2)

空間  $x$  について 2階微分 → 条件が 2個必要

境界条件  $u(0, t) = g_1(t)$ ,  $u(1, t) = g_2(t)$  (3)

式(1)(2)(3)を 初期値境界値問題 と呼ぶ。

7

### 1-3 2階線形方程式の分類

2階線形偏微分方程式の一般的な形

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G$$

$A, B, \dots, G$  は 定数 または  $x, y$  の関数.

\*  $B^2 - 4AC = 0$ : 放物型 (空間1次元問題で) 熱や物質などの拡散

\*  $B^2 - 4AC > 0$ : 双曲型 (空間1次元問題で) 振動, 波動

\*  $B^2 - 4AC < 0$ : 楕円型 (空間2次元で) 拡散問題の定常状態

8

### 2階線形方程式の標準形

\* 放物型  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dots$   $\dots$  は,  $u, u_x, u_y$  と既知関数を含む項

\* 双曲型  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dots$  (または  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots$ )

\* 楕円型  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots$

一般の式は, 変数変換によって上の3つに帰着する

→ レポート1 問2

9

### 2. 差分法とはどんな数値解法か?

例:  $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x)$ ,  $a < x < b$

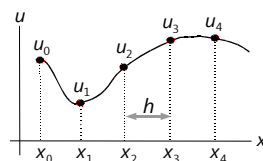
(1) 連続変数  $x$  を離散化する.

$$x_i = a + h i, \quad (i=0, \dots, N)$$

$$h = (b-a)/N.$$

$$u_i = u(x_i)$$

この値を求めるのが差分法の目標.



(2) 導関数は, 差分商で近似する.

(3)  $u_i$  についての方程式を解く.

10

### 2-1. 1階導関数の差分近似 [ $u = u(x)$ のとき ]

#### 前進差分

$u(x_i+h)$  を  $x=x_i$  中心のテイラー級数に展開する.

$$u(x_i+h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i) h + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}(x_i) h^2 + \dots \quad (1)$$

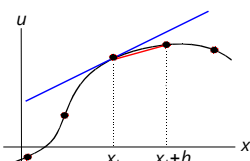
$\frac{du}{dx}$  について解くと,

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} + O(h)$$

$O(h)$  を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h}$$

前進差分近似の誤差は  $O(h)$   
( $h$  と同じかそれより小さい量)



11

#### 後退差分

$u(x_i-h)$  を  $x=x_i$  中心のテイラー級数に展開する.

$$u(x_i-h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i) h + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2}(x_i) h^2 + \dots \quad (2)$$

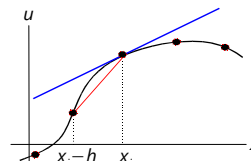
$\frac{du}{dx}$  について解くと,

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i-h)}{h} + O(h)$$

$O(h)$  を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_i-h)}{h}$$

後退差分近似の誤差は  $O(h)$



12

## 中心差分

$$u(x_i+h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (1)$$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (2)$$

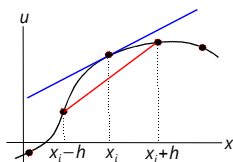
式(1) - 式(2) から

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h} + O(h^2)$$

$O(h^2)$ を無視すると

$$\frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h}$$

中心差分近似の誤差は  $O(h^2)$



13

## 2-2. 2階導関数の差分近似 [ $u=u(x)$ のとき ]

$$u(x_i+h) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (1)$$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - \frac{du}{dx}(x_i)h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i)h^2 + \dots \quad (2)$$

式(1) + 式(2) から

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) = \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2} + O(h^2)$$

$O(h^2)$ を無視すると

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2}$$

14

## 2階導関数の差分近似. 別の導出方法.

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \approx \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) = \frac{d}{dx} \frac{du}{dx}(x_i)$$

$$= \frac{1}{h} \left[ \frac{du}{dx}(x_i+h) - \frac{du}{dx}(x_i) \right] \quad \leftarrow \text{前進差分で近似}$$

$$= \frac{1}{h} \left[ \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_i-h)}{h} \right] \quad \leftarrow \text{後退差分で近似}$$

$$= \frac{u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h))}{h^2}$$

前進差分と後退差分の順番は逆でもよい.

15

## 2-3. 偏導関数の差分近似 [ $u=u(x, y)$ のとき ]

$$\text{例: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d$$

連続変数  $x, y$  を離散化する

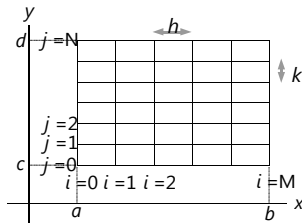
$$x_i = a + h i \quad (i=0, \dots, M),$$

$$h = (b-a)/M.$$

$$y_j = c + k j \quad (j=0, \dots, N),$$

$$k = (d-c)/N.$$

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j)$$



16

## 1 階偏導関数の差分近似

$u_{i\pm 1,j} = u(x_i \pm h, y_j)$  を  $(x, y) = (x_i, y_j)$  中心のテイラー級数に展開する

$$u_{i\pm 1,j} = u_{i,j} \pm \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 \pm \dots$$

1変数関数のときと同じ手順をふむと

$$\text{前進差分 } \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\text{後退差分 } \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

$$\text{中心差分 } \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$y$ 方向の場合はこう.

$$\text{前進 } \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$\text{後退 } \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

$$\text{中心 } \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

17

## 2階偏導関数の差分近似 $u_{xx}, u_{yy}$

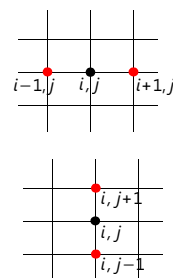
1変数関数のときと同じ手順で

$$u_{i\pm 1,j} = u_{i,j} \pm \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} h + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} h^2 \pm \dots \quad \text{から}$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j\pm 1} = u_{i,j} \pm \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} k^2 \pm \dots \quad \text{から}$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$



18

お し ま い

19

## レポート1

See 別紙

問1 線形/非線形. 見きわめと証明.

問2 2階偏微分方程式の分類に関して

\* 変数変換の練習.

\* 標準形へ変形すること.

20

おまけ情報: 余裕のある人向けの話

2階偏導関数の差分近似.

$u_{xy}$  の差分近似はどんなんか?

$u_{i\pm 1, j\pm 1} = u(x_i \pm h, y_j \pm k)$  を  $(x, y) = (x_i, y_j)$  中心に展開

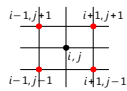
$$u_{i+1, j+1} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (1)$$

$$u_{i+1, j-1} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (2)$$

$$u_{i-1, j+1} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (3)$$

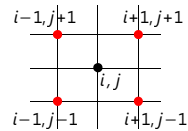
$$u_{i-1, j-1} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} h - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} h^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} hk + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} k^2 + \dots \quad (4)$$

(1)-(2)-(3)+(4)とすると, 右辺には  $u_{xy}$  (と4次以上の項)だけ残る 21



(1) - (2) - (3) + (4) を  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  について解いて, 高次の項を無視すると

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1, j+1} - u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j+1} - u_{i-1, j-1}}{4hk}$$



22